ITPASS 実習レポート

大田百合菜　情報実験機:joho04

2011 年 7 月 21 日

問題 1

(1)

慣性系において、中心星と惑星に対して、それぞれ以下の運動方程式が成り立つ。

$$m_1\ddot{\boldsymbol{r_1}} = \frac{Gm_1m_2}{r^2}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F_1} \tag{1}$$

$$m_2\ddot{\boldsymbol{r_2}} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F_2} \tag{2}$$

また、力のつりあいの関係より、

$$\boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2} = 0$$

となる。(1)、(2) をそれぞれ変形すると、

$$\ddot{\boldsymbol{r_1}} = \frac{Gm_2}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{3}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r_2}} = -\frac{Gm_1}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{4}$$

となる。(3)-(4) より

$$\ddot{\boldsymbol{r_2}} - \ddot{\boldsymbol{r_1}} = -\frac{G(m_1+m_2)}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{G(m_1+m_2)}{r^3}\boldsymbol{r}$$

これより導出できた。

(2)

$\dot{v_x}$ と $\dot{v_y}$ はそれぞれ加速度成分なので、

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = (\dot{v_x}, \dot{v_y}) \tag{5}$$

また、

$$r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

問題（1）の結果に (5)(6) 式を代入して、

$$(\dot{v_x}, \dot{v_y}) = -G\frac{m_1 + m_2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y)$$

これより、

$$\begin{aligned}
\dot{v_x} &= -G\frac{m_1 + m_2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}x \\
\dot{v_y} &= -G\frac{m_1 + m_2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}y
\end{aligned}$$

問題 2

(1)

二つの座標系の原点が惑星の重心なので、それぞれ比をとって、

$$\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \\
&= -\frac{\frac{\mu_2}{G}}{\frac{\mu_1}{G} + \frac{\mu_2}{G}} \\
&= -\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \\
&= -\mu_2
\end{aligned}$$

同様に、

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \\
&= \frac{\frac{\mu_1}{G}}{\frac{\mu_1}{G} + \frac{\mu_2}{G}} \\
&= \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \\
&= \mu_1
\end{aligned}$$

これより、

$$x_1 = -\mu_2 \tag{7}$$

$$x_2 = \mu_1 \tag{8}$$

今回は y 座標の運動はないので、

$$y_1 = 0 \tag{9}$$

$$y_2 = 0 \tag{10}$$

(7),(8),(9),(10) 式より、

$$\begin{aligned}
(x_1, y_1) &= (-\mu_2, 0) \\
(x_2, y_2) &= (\mu_1, 0)
\end{aligned}$$

(2)

なす角 θ は、角速度と時間の積なので、

$$\theta = \omega t \tag{11}$$

また、極座標変換で (ξ,η) を (x,y) で表す図より、θ だけ移動しなければならないので、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \tag{12}$$

(12) 式に、それぞれ $\cos(\omega t)$ と $\sin(\omega t)$ を両辺にかける。

$$x\cos(\omega t) = \xi\cos^2(\omega t) - \eta\cos(\omega t)\sin(\omega t) \tag{13}$$

$$y\sin(\omega t) = -\xi\sin^2(\omega t) + \eta\cos(\omega t)\sin(\omega t) \tag{14}$$

両辺を引くと、

$$\xi = x\cos(\omega t) - y\sin(\omega t) \tag{15}$$

同様に、(12) 式に、それぞれ $\sin(\omega t)$ と $\cos(\omega t)$ を両辺にかける。

$$x\sin(\omega t) = \xi\cos(\omega t)\sin(\omega t) - \eta\sin^2(\omega t)$$

$$y\cos(\omega t) = \xi\sin(\omega t)\cos(\omega t) + \eta\cos^2(\omega t)$$

両辺を引くと、

$$\eta = x\sin(\omega t) + y\cos(\omega t) \tag{16}$$

これより、

$$(\xi,\eta) = (x\cos(\omega t) - y\sin(\omega t), x\sin(\omega t) + y\cos(\omega t))$$

(3)

(15) 式を 2 回微分すると、

$$\dot{\xi} = \ddot{x}\cos(\omega t) - \omega x\sin(\omega t) - \dot{y}\sin(\omega t) - \omega y\cos(\omega t)$$

$$\ddot{\xi} = (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)\cos(\omega t) - (\ddot{y} - 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)\sin(\omega t)$$

同様に、(16) 式を 2 回微分すると、

$$\dot{\eta} = \dot{x}\sin(\omega t) + \omega x\cos(\omega t) + \dot{y}\cos(\omega t) - \omega y\sin(\omega t)$$

$$\ddot{\eta} = (\ddot{y} - \omega^2 y - 2\omega\dot{x})\cos(\omega t) + (\ddot{x} - \omega^2 x - 2\omega\dot{y})\sin(\omega t)$$

以上より求まった。

(4)

問題 2 の (2) の与式にある、(ξ_1,η_1)、(ξ_1,η_1) に、(2) の結果を代入すると、

$$\begin{aligned}
\ddot{\xi} &= \mu_1 \frac{(x_1\cos(\omega t) - y_1\sin(\omega t)) - (x\cos(\omega t) - y\sin(\omega t))}{r_1^3} + \mu_2 \frac{(x_2\cos(\omega t) - y_2\sin(\omega t)) - (x\cos(\omega t) - y\sin(\omega t))}{r_2^3} \\
&= \mu_1 \frac{(x_1 - x)\cos(\omega t) + y\sin(\omega t)}{r_1^3} - \mu_2 \frac{(x_2 - x)\cos(\omega t) + y\sin(\omega t)}{r_2^3} \\
&= -(\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3})\cos(\omega t) - (\mu_1 \frac{y}{r_1^3} + \mu_2 \frac{y}{r_2^3})\sin(\omega t) \\
\ddot{\eta} &= \mu_1 \frac{(x_1\sin(\omega t) + y_1\cos(\omega t)) - (x\sin(\omega t) + y\cos(\omega t))}{r_1^3} + \mu_2 \frac{(x_2\sin(\omega t) + y_2\cos(\omega t)) - (x\sin(\omega t) + y\cos(\omega t))}{r_2^3} \\
&= \mu_1 \frac{(x_1 + x)\sin(\omega t) + y\cos(\omega t)}{r_1^3} - \mu_2 \frac{(x_2 + x)\sin(\omega t) + y\cos(\omega t)}{r_2^3} \\
&= -(\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3})\sin(\omega t) - (\mu_1 \frac{y}{r_1^3} + \mu_2 \frac{y}{r_2^3})\cos(\omega t)\theta
\end{aligned}$$

これと (3) の結果を見比べて、

$$\begin{aligned}
\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x &= -[\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3}] \\
\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y &= -[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}]
\end{aligned}$$

(5)

三辺方の定理より、

$$r_1 = \sqrt{(x + \mu_2)} + y^2 \tag{17}$$

$$r_2 = \sqrt{(\mu_1 - x)} + y^2 \tag{18}$$

これを与式に代入して、

$$U = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{\sqrt{(x + \mu_2)^2 + y^2}} + \frac{\mu_2}{\sqrt{(\mu_1 - x)^2 + y^2}}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x} &= \omega^2 x - \mu_1 \frac{x + \mu_2}{\{(x + \mu_2)^2 + y^2\}^{\frac{3}{2}}} - \mu_2 \frac{x - \mu_1}{\{(\mu_1 - x)^2 + y^2\}^{\frac{3}{2}}} \\
&= \omega^2 x - [\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3}] \\
\ddot{x} - 2\omega\dot{y} &= \frac{\partial U}{\partial x}
\end{aligned}$$

同様に、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial y} &= \omega^2 y - \frac{\mu_1}{\{(x+\mu_2)^2+y^2\}^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu_2}{\{(\mu_1-x)^2+y^2\}^{\frac{3}{2}}} \\
&= \omega^2 y - [\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}] \\
\ddot{y} + 2\omega\dot{x} &= \frac{\partial U}{\partial y}
\end{aligned}
$$

(6)

(5) の結果の x 成分に $\dot{x}$、y 成分に $\dot{y}$ をかけると、

$$
\ddot{x}\dot{x} - 2\omega\dot{x}\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dU}{dt} \tag{19}
$$

$$
\ddot{y}\dot{y} + 2\omega\dot{x}\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dU}{dt} \tag{20}
$$

これらの式を両辺足し合わせて、

$$
\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} = \frac{dU}{dt}
$$

両辺を時間について積分して、

$$
\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}y^2 = U + const
$$

$const$ で表される定数がヤコビ定数 C_J なので、

$$
C_J = U - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)
$$