ITPASS 実習レポート

大田百合菜　情報実験機:joho04

2011 年 7 月 21 日

問題 1

(1)

慣性系において、中心星と惑星に対して、それぞれ以下の運動方程式が成り立つ。

$$m_1\ddot{\boldsymbol{r_1}} = \frac{Gm_1m_2}{r^2}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F_1} \tag{1}$$
$$m_2\ddot{\boldsymbol{r_2}} = \frac{Gm_1m_2}{r^2}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F_2} \tag{2}$$

また、力のつりあいの関係より、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2} &= 0\\ m_1\ddot{r_1} + m_2\ddot{r_2} &= 0\\ \frac{d}{dt}&(m_1\ddot{r_1} + m_2\ddot{r_2})\end{aligned}$$

となる。(1)、(2) をそれぞれ変形すると、

$$\ddot{\boldsymbol{r_1}} = \frac{Gm_2}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{3}$$
$$\ddot{\boldsymbol{r_2}} = \frac{Gm_1}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{4}$$

となる。(3)-(4) より

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{r_2}} - \ddot{\boldsymbol{r_1}} &= -\frac{G(m_1+m_2)}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\\ \ddot{\boldsymbol{r}} &= -\frac{G(m_1+m_2)}{r^3}\boldsymbol{r}\end{aligned}$$

これより導出できた。

(2)

$dotv_x$ と $\dot{v_y}$ はそれぞれ加速度成分なので、

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = (\dot{v_x}, \dot{v_y}) \tag{5}$$
$$\tag{6}$$

また、

$$r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \tag{7}$$

問題（1）の結果に (6)(7) 式を代入して、

$$(\dot{v_x}, \dot{v_y}) = -G\frac{m_1 + m_2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y)$$

これより、

$$\begin{aligned}\dot{v_x} &= -G\frac{m_1 + m_2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}x \\ \dot{v_y} &= -G\frac{m_1 + m_2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}y\end{aligned}$$

問題 2

(1)

二つの座標系の原点が惑星の重心なので、それぞれ比をとって、

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2} && (8) \\ &= -\frac{\frac{\mu_2}{G}}{\frac{\mu_1}{G} + \frac{\mu_2}{G}} && (9) \\ &= -\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} && (10) \\ &= -\mu_2 && (11) \end{aligned}$$

同様に、

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} && (12) \\ &= \frac{\frac{\mu_1}{G}}{\frac{\mu_1}{G} + \frac{\mu_2}{G}} && (13) \\ &= \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} && (14) \\ &= \mu_1 && (15) \end{aligned}$$

(2)

なす角 θ は、角速度と時間の積なので、

$$\theta = \omega t \tag{16}$$

また、極座標変換で (ξ,η) を (x,y) で表す図より、θ だけ移動しなければならないので、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(3)

(2) で求めた式に、それぞれ $\cos\theta$ と $\sin\theta$ を両辺にかける。

$$x\cos\theta = \xi\cos^2\theta - \eta\cos\theta\sin\theta \tag{17}$$
$$y\sin\theta = -\xi\sin^2\theta + \eta\cos\theta\sin\theta \tag{18}$$

両辺を引くと、

$$\xi = x\cos\theta - y\sin\theta \tag{19}$$

これを両辺 2 階微分すると、

$$\dot{\xi} = \ddot{x}\cos\omega t - \omega x\sin\omega t - \dot{y}\sin\omega t - \omega y\cos\omega t \tag{20}$$
$$\ddot{\xi} = (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)\cos\omega t - (\ddot{y} - 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)\sin\omega t \tag{21}$$

同様に、(2) で求めた式に、それぞれ $\sin\theta$ と $\cos\theta$ を両辺にかける。

$$x\sin\theta = \xi\cos\theta\sin\theta - \eta\sin^2\theta$$
$$y\cos\theta = \xi\sin\theta\cos\theta + \eta\cos^2\theta$$

両辺を引くと、

$$\eta = x\sin\theta + y\cos\theta \tag{22}$$

これを両辺 2 階微分すると、

$$\dot{\eta} = \dot{x}\sin\omega t + \omega x\cos\omega t + \dot{y}\cos\omega t - \omega y\sin\omega t$$
$$\ddot{\eta} = (\ddot{y} - \omega^2 y - 2\omega\dot{x})\cos\omega t + (\ddot{x} - \omega^2 x - 2\omega\dot{y})\sin\omega t$$

以上より求まった。

(4)

問題 2 の (2) の与式にある、(ξ_1,η_1)、(ξ_1,η_1) に、(2) の結果を代入すると、

$$\begin{aligned}
\ddot{\xi} &= \mu_1\frac{(x_1\cos\theta - y_1\sin\theta) - (x\cos\theta - y\sin\theta)}{r_1^3} + \mu_2\frac{(x_2\cos\theta - y_2\sin\theta) - (x\cos\theta - y\sin\theta)}{r_2^3} \\
&= \mu_1\frac{(x_1 - x)\cos\theta + y\sin\theta}{r_1^3} - \mu_2\frac{(x_2 - x)\cos\theta + y\sin\theta}{r_2^3} \\
&= -(\mu_1\frac{x+\mu_2}{r_1^3} + \mu_2\frac{x-\mu_1}{r_2^3})\cos\theta - (\mu_1\frac{y}{r_1^3} + \mu_2\frac{y}{r_2^3})\sin\theta \\
\ddot{\eta} &= \mu_1\frac{(x_1\sin\theta + y_1\cos\theta) - (x\sin\theta + y\cos\theta)}{r_1^3} + \mu_2\frac{(x_2\sin\theta + y_2\cos\theta) - (x\sin\theta + y\cos\theta)}{r_2^3} \\
&= \mu_1\frac{(x_1 + x)\sin\theta + y\cos\theta}{r_1^3} - \mu_2\frac{(x_2 + x)\sin\theta + y\cos\theta}{r_2^3} \\
&= -(\mu_1\frac{x+\mu_2}{r_1^3} + \mu_2\frac{x-\mu_1}{r_2^3})\sin\theta - (\mu_1\frac{y}{r_1^3} + \mu_2\frac{y}{r_2^3})\cos\theta
\end{aligned}$$

これと (3) の結果を見比べて、

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x &= -[\mu_1 \frac{x+\mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x-\mu_1}{r_2^3}] \\
\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y &= -[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}]
\end{aligned}
$$

(5)

三辺方の定理より、

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \sqrt{(x+\mu_2)} + y^2 && (23) \\
r_2 &= \sqrt{(\mu_1 - x)} + y^2 && (24)
\end{aligned}
$$

これを与式に代入して、

$$
\begin{aligned}
U = \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) + \frac{\mu_1}{\sqrt{(x+\mu_2)^2+y^2}} + \frac{\mu_2}{\sqrt{(\mu_1-x)^2+y^2}} \\
\frac{\partial U}{\partial x} &= \omega^2 x - \mu_1 \frac{x+\mu_2}{\{(x+\mu_2)^2+y^2\}^{\frac{3}{2}}} - \mu_2 \frac{x-\mu_1}{\{(\mu_1-x)^2+y^2\}^{\frac{3}{2}}} \\
&= \omega^2 x - [\mu_1 \frac{x+\mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x-\mu_1}{r_2^3}] \\
\ddot{x} - 2\omega\dot{y} &= \frac{\partial U}{\partial x}
\end{aligned}
$$

同様に、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial y} &= \omega^2 y - \frac{\mu_1}{\{(x+\mu_2)^2+y^2\}^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu_2}{\{(\mu_1-x)^2+y^2\}^{\frac{3}{2}}} \\
&= \omega^2 y - [\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}] \\
\ddot{y} + 2\omega\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y}
\end{aligned}
$$

(6)

(5) の結果の x 成分に $\dot{x}$、y 成分に $\dot{y}$ をかけると、

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}\dot{x} - 2\omega\dot{x}\dot{y} &= \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dU}{dt} && (25) \\
\ddot{y}\dot{y} + 2\omega\dot{x}\dot{y} &= \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dU}{dt} && (26)
\end{aligned}
$$

これらの式を両辺足し合わせて、

$$
\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} = \frac{dU}{dt}
$$

両辺を時間について積分して、

$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}y^2 = U + const$$

$const$ で表される定数がヤコビ定数 C_J なので、

$$C_J = U - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$