二体問題、三体問題

富永　裕貴

2011 年 7 月 21 日

1　問題 1

1.1

　質量 m_1 の惑星の運動方程式は

$$m_1\ddot{\vec{r_1}} = -Gm_1m_2\frac{\vec{r_1}-\vec{r_2}}{|\vec{r_1}-\vec{r_2}|^3} \tag{1}$$

となり、同様に、質量 m_2 の惑星の運動方程式は

$$m_2\ddot{\vec{r_2}} = -Gm_1m_2\frac{\vec{r_2}-\vec{r_1}}{|\vec{r_2}-\vec{r_1}|^3} \tag{2}$$

となる。(2)-(1) より

$$\ddot{r} = -G(m_1+m_2)\frac{\vec{r}}{r^3} \tag{3}$$

という式が導出される。ここで、

$$\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1} \tag{4}$$

であると置いた。この運動方程式は、任意の原点をとったときの 2 体の相対運動を表している。

1.2

　今、

$$r = \sqrt{(x^2+y^2)} \tag{5}$$

であり、

$$G = 1 \tag{6}$$

$$m_1 + m_2 = 1 \tag{7}$$

である。この条件を (3) に代入すると、

$$\dot{\vec{v}} == -\frac{\vec{r}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{8}$$

となり、これを x 成分と y 成分にそれぞれ分解して書くと、

$$\dot{v_x} = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{9}$$

$$\dot{v_y} = -\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{10}$$

となる。

2　問題 2

2.1

円制限 3 体問題での質量 μ_1 の惑星と μ_2 の惑星の回転系での座標をそれぞれ (x_1,y_1)、(x_2,y_2) とする。今、原点 O は質量 μ_1 の惑星と μ_2 の惑星の重心にあたるので、質量比より (x_1,y_1)、(x_2,y_2) は

$$(x_1, y_1) = (-\mu_2, 0) \tag{11}$$

$$(x_2, y_2) = (\mu_1, 0) \tag{12}$$

となる。

2.2

角速度 ω で、時刻 t だけ進んでいるので、ξ 軸と x 軸とのなす角度 θ は

$$\theta = \omega t \tag{13}$$

となる。また、これを用いると、

$$(\xi, \eta) = (xcos\omega t - ysin\omega t, xsin\omega t + ycos\omega t) \tag{14}$$

となる。

2.3

x、y も t の関数であるため、積の微分を行う。

$$\dot{\xi} = \dot{x}cos\omega t - x\omega sin\omega t - \dot{y}sin\omega t - y\omega cos\omega t \tag{15}$$

$$\dot{\eta} = \dot{x}sin\omega t + x\omega cos\omega t + \dot{y}cos\omega t - y\omega sin\omega t \tag{16}$$

これをもう一度微分する。

$$\ddot{\xi} = \ddot{x}cos\omega t - 2\dot{x}\omega sin\omega t - x\omega^2 cos\omega t - \ddot{y}sin\omega t - 2\dot{y}\omega cos\omega t + y\omega^2 sin\omega t \tag{17}$$

$$\ddot{\eta} = \ddot{x}sin\omega t + 2\dot{x}\omega cos\omega t - x\omega^2 sin\omega t + \ddot{y}cos\omega t - 2\dot{y}\omega sin\omega t - y\omega^2 cos\omega t \tag{18}$$

2.4

ここで、t=0 の時を考える。t=0 のとき (ξ,η) と (x,y) は一致する。(左辺)=

$$\ddot{\xi_{t=0}} = \ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x \tag{19}$$

(右辺)=

$$\mu_1\frac{\xi_1-\xi}{r_1^3} + \mu_2\frac{\xi_2-\xi}{r_2^3} = \mu_1\frac{-\mu_2-x}{r_1^3} + \mu_2\frac{\mu_1-x}{r_2^3} = -[\mu_1\frac{\mu_2+x}{r_1^3} + \mu_2\frac{x-\mu_1}{r_2^3}] \tag{20}$$

(左辺)=

$$\ddot{\eta_{t=0}} = \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y \tag{21}$$

(右辺)=

$$\mu_1\frac{\eta_1-\eta}{r_1^3} + \mu_2\frac{\eta_2-\eta}{r_2^3} = \mu_1\frac{0-y}{r_1^3} + \mu_2\frac{0-y}{r_2^3} = -[\frac{\eta_1}{r_1^3} + \mu_2\frac{\eta_2}{r_2^3}]y \tag{22}$$

となる。

2.5

まず、∇ U の x 成分を U_x,U の y 成分を U_y とする。

$$U_x = \frac{\omega^2}{2}(2x) + \mu_1\frac{dr}{dx}\frac{d}{dr}\frac{1}{r_1} + \mu_2\frac{dr}{dx}\frac{d}{dr}\frac{1}{r_2} \tag{23}$$

$$U_y = \frac{\omega^2}{2}(2y) + \mu_1\frac{dr}{dy}\frac{d}{dr}\frac{1}{r_1} + \mu_2\frac{dr}{dy}\frac{d}{dr}\frac{1}{r_2} \tag{24}$$

である。今、三平方の定理より r_1 と r_2 はそれぞれ、

$$r_1 = \sqrt{(x+\mu_2)^2 + y^2} \tag{25}$$

$$r_2 = \sqrt{(\mu_1-x)^2 + y^2} \tag{26}$$

なので、(23),(24) は以下のように変形できる。

$$U_x = \omega^2 x + \mu_1 \frac{x+\mu_2}{\sqrt{(x+\mu_2)^2+y^2}}(\frac{-1}{r_1^2}) + \mu_2 \frac{x-\mu_1}{\sqrt{(\mu_1-x)^2+y^2}}(\frac{-1}{r_2^2}) \tag{27}$$

$$U_y = \omega^2 y + \mu_1 \frac{y}{\sqrt{(x+\mu_2)^2+y^2}}(\frac{-1}{r_1^2}) + \mu_2 \frac{y}{\sqrt{(\mu_1-x)^2+y^2}}(\frac{-1}{r_2^2}) \tag{28}$$

となる。さらに (27)(28) を整理して

$$U_x = \omega^2 x - (\mu_1 \frac{x+\mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x-\mu_1}{r_2^3}) \tag{29}$$

$$U_y = \omega^2 y - (\mu_1 \frac{y}{r_1^3} + \mu_2 \frac{y}{r_2^3}) \tag{30}$$

となる。よって、

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = U_x \tag{31}$$

となり、

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} = U_y \tag{32}$$

となる。

2.6

問題文に与えられた通りに式を変形すると

$$\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} = U_x\dot{x} + U_y\dot{y} \tag{33}$$

となる。ここで、左辺は

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)) \tag{34}$$

と、変形できる。また、右辺は全微分方程式より、以下のようになる。

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy \tag{35}$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{36}$$

ここで、両辺を積分すると

$$U = \frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + C_j \tag{37}$$

(C_J は積分定数) となり、

$$C_j = U - \frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) \tag{38}$$

となる。