ITpass 実習課題

寺村 大樹

2011 年 7 月 28 日

1 問題 1

1.1

中心星の運動方程式は

$$m_1 \cdot \ddot{\vec{r_1}} = -\frac{Gm_1m_2}{|\vec{r_1} - \vec{r_2}|^3}(-\vec{r}) \tag{1}$$

惑星の運動方程式は

$$m_2 \cdot \ddot{\vec{r_2}} = -\frac{Gm_1m_2}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|^3}\vec{r} \tag{2}$$

よって (2)-(1) より

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3}\vec{r} \tag{3}$$

となる。これは中心星を原点とした、中心星から見て相対的な惑星の円運動を表す方程式である。

1.2

$\dot{v_x}$,$\dot{v_y}$ はそれぞれ $\frac{d^2x}{dt^2}$,$\frac{d^2y}{dt^2}$ である。ここで、

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3}\vec{r} = -\frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}(x + y) \tag{4}$$

仮に $G(m_1 + m_2) = 1$ とする。$\dot{v_x}$,$\dot{v_y}$ はそれぞれ $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ の x 成分、y 成分であるから、

$$\dot{v_x} = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{5}$$

$$\dot{v_y} = -\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{6}$$

2　問題 2

2.1

m_1 と m_2 は x 軸上にあるから、$y_1 = y_2 = 0$。重心の関係により

$$x_1\mu_1 + x_2\mu_2 = 0 \tag{7}$$

$r = x_2 - x_1 = 1$, $\mu = \mu_1 + \mu_2 = 1$ により、整理すると

$$x_1 = -\mu_2 \quad , \quad x_2 = \mu_1 \tag{8}$$

よって　　　　$(x_1, y_1) = (-\mu_2, 0) \quad , \quad (x_2, y_2) = (\mu_1, 0)$ となる。

2.2

$$\theta = \omega t \tag{9}$$

よって、$\xi\eta$ 軸が反時計回りに θ だけ回ったものを xy 軸だと考えると

$$\xi = x\cos\omega t - y\sin\omega t \tag{10}$$

$$\eta = x\sin\omega t + y\cos\omega t \tag{11}$$

2.3

(10) を 1 階、2 階微分する。

$$\dot{\xi} = \dot{x}\cos\omega t - x\omega\sin\omega t - \dot{y}\sin\omega t - y\omega\cos\omega t \tag{12}$$

$$\ddot{\xi} = \ddot{x}\cos\omega t - 2\dot{x}\omega\sin\omega t - x\omega^2\cos\omega t - \ddot{y}\sin\omega t - 2\dot{y}\omega\cos\omega t + y\omega^2\sin\omega t \tag{13}$$

同様に (11) を 1 階、2 階微分する。

$$\dot{\eta} = \dot{x}\sin\omega t + x\omega\cos\omega t + \dot{y}\cos\omega t - y\omega\sin\omega t \tag{14}$$

$$\ddot{\xi} = \ddot{x}\sin\omega t + 2\dot{x}\omega\cos\omega t - x\omega^2\sin\omega t + \ddot{y}\cos\omega t - 2\dot{y}\omega\sin\omega t - y\omega^2\cos\omega t \tag{15}$$

2.4

$t=0$ のとき、(ξ,η) が (x,y) と一致する。与式 1

$$\ddot{\xi}=\mu_1\frac{\xi_1-\xi}{r_1^3}+\mu_2\frac{\xi_2-\xi}{r_2^3} \tag{16}$$

に $\xi_{t=0}$ を代入する。ただし、$\xi_1=x_1$, $\xi_2=x_2$ である。

$$(\text{左辺})=\ddot{\xi}_{t=0}=\ddot{x}-2\omega\dot{y}-\omega^2x \tag{17}$$

$$(\text{右辺})=\mu_1\frac{x_1-\xi_{t=0}}{r_1^3}+\mu_2\frac{x_2-\xi_{t=0}}{r_2^3}=\mu_1\frac{-\mu_2-x}{r_1^3}+\mu_2\frac{\mu_1-x}{r_2^3} \tag{18}$$

$$=-\Big(\mu_1\frac{x+\mu_2}{r_1^3}+\mu_2\frac{x-\mu_1}{r_2^3}\Big) \tag{19}$$

与式 2

$$\ddot{\eta}=\mu_1\frac{\eta_1-\eta}{r_1^3}+\mu_2\frac{\eta_2-\eta}{r_2^3} \tag{20}$$

についても同様に代入する。ただし $\eta_1=y_1$, $\eta_2=y_2$ である。

$$(\text{左辺})=\ddot{\eta}_{t=0}=\ddot{y}+2\omega\dot{x}-\omega^2y \tag{21}$$

$$(\text{右辺})=\mu_1\frac{y_1-\eta_{t=0}}{r_1^3}+\mu_2\frac{y_2-\eta_{t=0}}{r_2^3}=\mu_1\frac{0-y}{r_1^3}+\mu_2\frac{0-y}{r_2^3} \tag{22}$$

$$=-\Big(\frac{\mu_1}{r_1^3}+\frac{\mu_2}{r_2^3}\Big)y \tag{23}$$

2.5

与式 $U=\frac{\omega^2}{2}\left(x^2+y^2\right)+\frac{\mu_1}{r_1}+\frac{\mu_2}{r_2}$ を x,y でそれぞれ偏微分したものを ∇U_x , ∇U_y とする。x 成分について

$$\nabla U_x=\frac{\omega^2}{2}2x+\mu_1\frac{\partial r_1}{\partial x}\frac{d}{dr_1}\Big(\frac{1}{r_1}\Big)+\mu_2\frac{\partial r_2}{\partial x}\frac{d}{dr_2}\Big(\frac{1}{r_2}\Big) \tag{24}$$

ここで、三平方の定理より $r_1=\sqrt{(x+\mu_2)^2+y^2}$, $r_2=\sqrt{(x-\mu_1)^2+y^2}$ だから

$$\frac{\partial r_1}{\partial x}=\frac{x+\mu_2}{r_1} \tag{25}$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial x}=\frac{x-\mu_1}{r_2} \tag{26}$$

したがって (24) は、

$$\nabla U_x = \frac{\omega^2}{2}2x + \mu_1\frac{x+\mu_2}{r_1}\Big(-\frac{1}{r_1^2}\Big) + \mu_2\frac{x-\mu_2}{r_2}\Big(-\frac{1}{r_2^2}\Big) \tag{27}$$

$$= \omega^2 x - \Big(\mu_1\frac{x+\mu_2}{r_1^3} + \mu_2\frac{x-\mu_1}{r_2^3}\Big) \tag{28}$$

y 成分も同様にして

$$\nabla U_y = \omega^2 y - \Big(\mu_1\frac{y}{r_1^3} + \mu_2\frac{y}{r_2^3}\Big) \tag{29}$$

(17)〜(19) と (27)〜(28)、(21)〜(23) と (29) をそれぞれ比較すると

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = \nabla U_x \tag{30}$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} = \nabla U_y \tag{31}$$

となる。

2.6

(30) $\times\ \dot{x}$+(31) $\times\ \dot{y}$ は

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = \dot{x}\nabla U_x + \dot{y}\nabla U_y \tag{32}$$

ここで左辺を変形すると

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)\Big) \tag{33}$$

次に右辺は全微分の形になっているから

$$\frac{\partial U}{\partial t} \tag{34}$$

となる。最後に両辺を時間について積分すると

$$\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = U + C_J \tag{35}$$

$$C_J = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - U \tag{36}$$

となる。（ただし C_J は積分定数）