

ITpass 実習課題

寺村 大樹

2011 年 7 月 26 日

1 問題 1

1.1

中心星の運動方程式は

$$m_1 \cdot \ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{Gm_1m_2}{|r_2 - r_1|^3} (-\vec{r}) \quad (1)$$

惑星の運動方程式は

$$m_2 \cdot \ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{Gm_1m_2}{|r_2 - r_1|^3} \vec{r} \quad (2)$$

よって (2)-(1) より

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} \vec{r} \quad (3)$$

となる。これは、惑星と中心星の重心の運動方程式である。

1.2

\dot{v}_x, \dot{v}_y はそれぞれ $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}$ である。ここで、

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} \vec{r} = -\frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} (x + y) \quad (4)$$

仮に $G(m_1 + m_2) = 1$ とする。 \dot{v}_x, \dot{v}_y はそれぞれ $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ の x 成分、y 成分であるから、

$$\dot{v}_x = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (5)$$

$$\dot{v}_y = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (6)$$

2 問題 2

2.1

m_1 と m_2 は x 軸上にあるから、 $y_1 = y_2 = 0$ 。重心の関係により

$$x_1\mu_1 + x_2\mu_2 = 0 \quad (7)$$

$r = r_1 + r_2 = x_1 + x_2 = 1$ ($y_1 = y_2 = 0$) , $\mu = \mu_1 + \mu_2 = 1$ により、整理すると

$$x_1 = -\mu_2 \quad , \quad x_2 = \mu_1 \quad (8)$$

よって $(x_1, y_1) = (-\mu_2, 0)$, $(x_2, y_2) = (\mu_1, 0)$ となる。

2.2

$$\theta = \omega t \quad (9)$$

よって、 $\xi\eta$ 軸が反時計回りに θ だけ回ったものを xy 軸だと考えると

$$\xi = x \cos \omega t - y \sin \omega t \quad (10)$$

$$\eta = x \sin \omega t + y \cos \omega t \quad (11)$$

2.3

(10) を 1 階、2 階微分する。

$$\dot{\xi} = \dot{x} \cos \omega t - x\omega \sin \omega t - \dot{y} \sin \omega t - y\omega \cos \omega t \quad (12)$$

$$\ddot{\xi} = \ddot{x} \cos \omega t - 2\dot{x}\omega \sin \omega t - x\omega^2 \cos \omega t - \ddot{y} \sin \omega t - 2\dot{y}\omega \cos \omega t + y\omega^2 \sin \omega t \quad (13)$$

同様に (11) を 1 階、2 階微分する。

$$\dot{\eta} = \dot{x} \sin \omega t + x\omega \cos \omega t + \dot{y} \cos \omega t - y\omega \sin \omega t \quad (14)$$

$$\ddot{\eta} = \ddot{x} \sin \omega t + 2\dot{x}\omega \cos \omega t - x\omega^2 \sin \omega t + \ddot{y} \cos \omega t - 2\dot{y}\omega \sin \omega t - y\omega^2 \cos \omega t \quad (15)$$

2.4

$t = 0$ のとき、 (ξ, η) が (x, y) と一致する。与式 1

$$\ddot{\xi} = \mu_1 \frac{\xi_1 - \xi}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3} \quad (16)$$

に $\xi_{t=0}$ を代入する。ただし、 $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = x_2$ である。

$$(\text{左辺}) = \ddot{\xi}_{t=0} = \ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x \quad (17)$$

$$(\text{右辺}) = \mu_1 \frac{x_1 - \xi_{t=0}}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - \xi_{t=0}}{r_2^3} = \mu_1 \frac{-\mu_2 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\mu_1 - x}{r_2^3} \quad (18)$$

$$= -\left(\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3}\right) \quad (19)$$

与式 2

$$\ddot{\eta} = \mu_1 \frac{\eta_1 - \eta}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\eta_2 - \eta}{r_2^3} \quad (20)$$

についても同様に代入する。ただし $\eta_1 = y_1$, $\eta_2 = y_2$ である。

$$(\text{左辺}) = \ddot{\eta}_{t=0} = \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y \quad (21)$$

$$(\text{右辺}) = \mu_1 \frac{y_1 - \eta_{t=0}}{r_1^3} + \mu_2 \frac{y_2 - \eta_{t=0}}{r_2^3} = \mu_1 \frac{0 - y}{r_1^3} + \mu_2 \frac{0 - y}{r_2^3} \quad (22)$$

$$= -\left(\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}\right)y \quad (23)$$

2.5

与式 $U = \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}$ を x, y でそれぞれ偏微分したものを ∇U_x , ∇U_y とする。 x 成分について

$$\nabla U_x = \frac{\omega^2}{2} 2x + \mu_1 \frac{dr_1}{dx} \frac{d}{dr_1} \left(\frac{1}{r_1}\right) + \mu_2 \frac{dr_2}{dx} \frac{d}{dr_2} \left(\frac{1}{r_2}\right) \quad (24)$$

ここで、三平方の定理より $r_1 = \sqrt{(x + \mu_2)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x - \mu_1)^2 + y^2}$ だから

$$\frac{dr_1}{dx} = \frac{x + \mu_2}{r_1} \quad (25)$$

$$\frac{dr_2}{dx} = \frac{x - \mu_1}{r_2} \quad (26)$$

したがって (24) は、

$$\nabla U_x = \frac{\omega^2}{2} 2x + \mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1} \left(-\frac{1}{r_1^2}\right) + \mu_2 \frac{x - \mu_2}{r_2} \left(-\frac{1}{r_2^2}\right) \quad (27)$$

$$= \omega^2 x - \left(\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_2}{r_2^3} \right) \quad (28)$$

y 成分も同様にして

$$\nabla U_y = \omega^2 y - \left(\mu_1 \frac{y}{r_1^3} + \mu_2 \frac{y}{r_2^3} \right) \quad (29)$$

(17) ~ (19) と (27) ~ (28)、(21) ~ (23) と (29) をそれぞれ比較すると

$$\ddot{x} - 2\omega \dot{y} = \nabla U_x \quad (30)$$

$$\ddot{y} + 2\omega \dot{x} = \nabla U_y \quad (31)$$

となる。

2.6

(30) × \dot{x} + (31) × \dot{y} は

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = \dot{x}\nabla U_x + \dot{y}\nabla U_y \quad (32)$$

ここで左辺を変形すると

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \right) \quad (33)$$

次に右辺は全微分の形になっているから

$$\frac{\partial U}{\partial t} \quad (34)$$

となる。最後に両辺を時間について積分すると

$$\frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = U + C_J \quad (35)$$

$$C_J = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U \quad (36)$$

となる。(ただし C_J は積分定数)