数値計算実習課題その1

清水俊平　(joho08)

2011年7月1日(金)出題分

1　問題1の解答

問1

中心星、惑星の質量をそれぞれ m_1,m_2、位置ベクトルをそれぞれ $\mathbf{r}_1$,$\mathbf{r}_2$ とする。

万有引力の法則は

$$F = -\frac{GmM}{r^2}$$

であるためこれを用いると、

中心星における運動方程式は

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \tag{1}$$

となる。

惑星における運動方程式は

$$m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \tag{2}$$

となる。

(1) 式の両辺を m_1 で割ると

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{Gm_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \tag{3}$$

となる。また、(2) 式の両辺を m_2 で割ると

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{Gm_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \tag{4}$$

ここで

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \tag{5}$$

と相対ベクトル $\mathbf{r}$ を定義する。

(5) 式の両辺を t に関して 2 階微分すると

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 \tag{6}$$

となるので、ここで (6) 式に (3) 式と (4) 式をそれぞれ代入すると

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} &= -\frac{G(m_1+m_2)}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1) \\ &= -\frac{G(m_1+m_2)}{r^3}\mathbf{r} \end{aligned} \tag{7}$$

となる。

この式は中心星から見たときの惑星の相対運動を表わしている。中心星と惑星の質量を合わせた質点が、相対ベクトル上を中心星を中心とした回転運動をすることが分かる。

問 2

(7) 式の運動方程式を成分に分けることを考える。

ここで

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= (v_x, v_y) \\ \mathbf{r} &= (x, y) \\ r &= \sqrt{x^2+y^2}\end{aligned}$$

であるので、(7) 式より

$$\dot{v_x} = \ddot{x} = -\frac{G(m_1+m_2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}x \tag{8}$$

$$\dot{v_y} = \ddot{y} = -\frac{G(m_1+m_2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}y \tag{9}$$

となる。

2 問題2の解答

問 1

惑星と中心星は常に x 軸上にあるので

$$y_1 = y_2 = 0 \tag{10}$$

となる。

ここで、回転系での中心星、惑星の x 座標をそれぞれ x_1,x_2 とおくと

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-m_2}{m_1+m_2} \\ &= \frac{-\mu_2}{\mu_1+\mu_2} \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{m_1}{m_1+m_2} \\ &= \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} \end{aligned} \tag{12}$$

となる。(中心星と惑星との距離は1とする)

ここで、$\mu_1 + \mu_2 = 1$ なので (11),(12) 式に代入すると

$$x_1 = -\mu_2 \tag{13}$$

$$x_2 = \mu_1 \tag{14}$$

以上、(10),(13),(14) 式より

$$(x_1, y_1) = (-\mu_2, 0) \tag{15}$$

$$(x_2, y_2) = (\mu_1, 0) \tag{16}$$

問 2

角速度が ω なので、ξ 軸と x 軸のなす角度 θ は

$$\theta = \omega t \tag{17}$$

また、回転による座標変換なので

$$\begin{aligned} \xi &= xcos\theta - ysin\theta \\ &= xcos\omega t - ysin\omega t \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \eta &= xsin\theta + ycos\theta \\ &= xsin\omega t + ycos\omega t \end{aligned} \tag{19}$$

となる。

問 3

(18),(19) 式をそれぞれ時間で二階微分する。

$$\dot{\xi} = \dot{x}cos\omega t - \omega x sin\omega t - \dot{y}sin\omega t - \omega y cos\omega t$$

$$\dot{\eta} = \dot{x}sin\omega t + \omega x cos\omega t + \dot{y}cos\omega t - \omega y sin\omega t$$

よって

$$\ddot{\xi} = \ddot{x}cos\omega t - \ddot{y}sin\omega t - 2\omega\dot{x}sin\omega t - 2\omega\dot{y}cos\omega t - \omega^2 x cos\omega t + \omega^2 y sin\omega t \quad (20)$$

$$\ddot{\eta} = \ddot{x}sin\omega t + \ddot{y}cos\omega t + 2\omega\dot{x}cos\omega t - 2\omega\dot{y}sin\omega t - \omega^2 x sin\omega t - \omega^2 y cos\omega t \quad (21)$$

となる。

問 4

式 (20),(21) より

$$\ddot{\xi} = (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)cos\omega t - (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)sin\omega t \quad (22)$$

$$\ddot{\eta} = (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)sin\omega t + (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)cos\omega t \quad (23)$$

となる。

また、(18),(19) 式と (15),(16) 式の結果より

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 cos\omega t - y_1 sin\omega t \\ &= -\mu_2 cos\omega t \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \xi_2 &= x_2 cos\omega t - y_2 sin\omega t \\ &= \mu_1 cos\omega t \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \eta_1 &= x_1 sin\omega t + y_1 cos\omega t \\ &= -\mu_2 sin\omega t \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \eta_2 &= x_2 sin\omega t + y_2 cos\omega t \\ &= \mu_1 sin\omega t \end{aligned} \quad (27)$$

となる。

ここで、(22)〜(27) 式と与式より

$$\ddot{\xi} = -\left[\mu_1 \frac{x+\mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x-\mu_1}{r_2^3}\right] cos\omega t + \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}\right] y sin\omega t \quad (28)$$

$$\ddot{\eta} = -\left[\mu_1 \frac{x+\mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x-\mu_1}{r_2^3}\right] sin\omega t - \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}\right] ycos\omega t \tag{29}$$

となる。

よって、この (28),(29) 式と (22),(23) 式を比較すると

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x = -\left[\mu_1 \frac{x+\mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x-\mu_1}{r_2^3}\right] \tag{30}$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y = -\left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}\right] y \tag{31}$$

が導かれる。

問 5

$$r_1 = \sqrt{(x+\mu_2)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(\mu_1 - x)^2 + y^2}$$

なので、ポテンシャル U の式は

$$U = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{\sqrt{(x+\mu_2)^2 + y^2}} + \frac{\mu_2}{\sqrt{(\mu_1 - x)^2 + y^2}} \tag{32}$$

となる。

ここで、x,y についての偏微分をそれぞれ考えると

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \omega^2 x - \left[\mu_1 \frac{x+\mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x-\mu_1}{r_2^3}\right] \tag{33}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \omega^2 y - \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}\right] y \tag{34}$$

となるので、粒子 P についての運動方程式は

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} \tag{35}$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} \tag{36}$$

と表わされる。

問 6

(35) の両辺に $\dot{x}$、(36) の両辺に $\dot{y}$ をそれぞれかける。

$$\dot{x}\ddot{x} - 2\omega\dot{x}\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} \tag{37}$$

$$\dot{y}\ddot{y} + 2\omega\dot{x}\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} \tag{38}$$

ここで、(37)+(38) をすると

$$\begin{aligned} \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} &= \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} \\ &= \frac{dU}{dt} \end{aligned} \tag{39}$$

となる。

この (39) 式を時間 t について積分すると

$$U - \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = C_J \tag{40}$$

ここで、C_J は積分定数であり、円制限三体問題の保存量であるヤコビ定数となっている。(C_J は負の符号も含めて定数としている)