ITPASS 数値計算実習 課題その 1

原田竣也 joho 02

平成 23 年 7 月 29 日

1　2 体問題

1.1

万有引力についてのみ考えればよいので，中心星及び惑星の運動方程式はそれぞれ

$$m_1\ddot{\boldsymbol{r_1}} = -Gm_1m_2\frac{\boldsymbol{r_1}-\boldsymbol{r_2}}{|\boldsymbol{r_1}-\boldsymbol{r_2}|^3} \tag{1}$$

$$m_2\ddot{\boldsymbol{r_2}} = -Gm_1m_2\frac{\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}}{|\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}|^3} \tag{2}$$

と表せる．ここで (1) を m_1，(2) を m_2 でそれぞれ割る．

$$\ddot{\boldsymbol{r_1}} = -Gm_2\frac{\boldsymbol{r_1}-\boldsymbol{r_2}}{|\boldsymbol{r_1}-\boldsymbol{r_2}|^3} \tag{3}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r_2}} = -Gm_1\frac{\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}}{|\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}|^3} \tag{4}$$

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}$ とし，(4) − (3) より

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{G(m_1+m_2)}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{5}$$

この式は中心星の質量を $m_1 + m_2$ として中心星が静止し，それを中心に惑星が運動している 2 天体の相対運動を示している．

1.2

1.1 で得られた運動方程式よりそれぞれ

$$\dot{v_x} = -\frac{G(m_1+m_2)}{(x^2+y^2)^{3/2}}x \tag{6}$$

$$\dot{v_y} = -\frac{G(m_1+m_2)}{(x^2+y^2)^{3/2}}y \tag{7}$$

と表せる．

2　3体問題

2.1

2天体の座標はそれぞれ

$$-\left[\mu_1\frac{x+\mu_2}{r_1^3}+\mu_2\frac{x-\mu_1}{r_2^3}\right](x_1,y_1)=\left(-\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2},0\right),\ (x_2,y_2)=\left(\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2},0\right) \quad (8)$$

である．ここで $\mu_1+\mu_2=1$ であるからそれぞれ

$$(x_1,y_1)=(-\mu_2,0),\ (x_2,y_2)=(\mu_1,0) \tag{9}$$

と表せる．

2.2

θ は角速度 ω を利用して

$$\theta=\omega t \tag{10}$$

と表せる．また回転行列 $\boldsymbol{R}$ は次のように表わされる．

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \tag{11}$$

これより

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\boldsymbol{R}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \tag{12}$$

であるから

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\cos\omega t-y\sin\omega t\\ x\sin\omega t+y\cos\omega t\end{pmatrix} \tag{13}$$

となる．

2.3

(13) の式をそれぞれ時間について2回微分すると

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= -(\omega x+\dot{y})\sin\omega t+(\dot{x}-\omega y)\cos\omega t\\ \dot{\eta} &= (\dot{x}-\omega y)\sin\omega t+(\omega x+\dot{y})\cos\omega t\end{aligned}$$

であるから，それぞれの式は

$$\ddot{\xi}=(\ddot{x}-2\omega\dot{y}-\omega^2x)\cos\omega t-(\ddot{y}+2\omega\dot{x}-\omega^2y)\sin\omega t \tag{14}$$

$$\ddot{\eta}=(\ddot{y}+2\omega\dot{x}-\omega^2y)\cos\omega t+(\ddot{x}-2\omega\dot{y}-\omega^2x)\sin\omega t \tag{15}$$

となる．

2.4

(9), (13) と与式より，それぞれ

$$\ddot{\xi} = \mu_1 \frac{-(\mu_2 + x)\cos\omega t + y\sin\omega t}{r_1^3} + \mu_2 \frac{(\mu_1 - x)\cos\omega t + y\sin\omega t}{r_2^3} \tag{16}$$

$$\ddot{\eta} = \mu_1 \frac{-(\mu_2 + x)\sin\omega t - y\cos\omega t}{r_1^3} + \mu_2 \frac{(\mu_1 - x)\sin\omega t - y\cos\omega t}{r_2^3} \tag{17}$$

と表せる．ここで (16) に $\cos\omega t$，(17) に $\sin\omega t$ をそれぞれかけて，2 式をたすと

$$\ddot{\xi}\cos\omega t + \ddot{\eta}\sin\omega t = -\left[\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3}\right] \tag{18}$$

となるので，(18) の左辺に (14)，(15) を代入して

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x \quad = \quad -\left[\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3}\right] \tag{19}$$

となる．また，(16) に $-\sin\omega t$，(17) に $\cos\omega t$ をそれぞれかけて，2 式をたすと

$$-\ddot{\xi}\sin\omega t + \ddot{\eta}\cos\omega t = -\left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}\right] y \tag{20}$$

となるので，(20) の左辺に (14)，(15) を代入して

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y \quad = \quad -\left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}\right] y \tag{21}$$

とそれぞれ導ける．

2.5

r_1, r_2 はそれぞれ

$$r_1 = \sqrt{(x + \mu_2)^2 + y^2} \tag{22}$$

$$r_2 = \sqrt{(\mu_1 - x)^2 + y^2} \tag{23}$$

と表せる．ここで，与えられた U に (22)，(23) を代入し，x, y についてそれぞれ偏微分する．

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \omega^2 x - \frac{\mu_1(x + \mu_2)}{[(x + \mu_2)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{\mu_2(x - \mu_1)}{[(\mu_1 - x)^2 + y^2]^{3/2}} \\ &= \omega^2 x - \frac{\mu_1}{r_1^3}(x + \mu_2) - \frac{\mu_2}{r_2^3}(x - \mu_1) \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y} &= \omega^2 y - \frac{\mu_1 y}{[(x + \mu_2)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{\mu_2 y}{[(\mu_1 - x)^2 + y^2]^{3/2}} \\ &= \omega^2 y - \frac{\mu_1 y}{[(x + \mu_2)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{\mu_2 y}{[(\mu_1 - x)^2 + y^2]^{3/2}} \end{aligned} \tag{25}$$

となるので，(19)，(21) の式はそれぞれ

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \ddot{x} - 2\omega\dot{y} \tag{26}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \ddot{y} + 2\omega\dot{x} \tag{27}$$

と表せる．

2.6

$\dot{x}$,$\dot{y}$ を (26)，(27) の式にそれぞれ掛け合わせる．

$$\dot{x}\ddot{x} - 2\omega\dot{x}\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} \tag{28}$$

$$\dot{y}\ddot{y} + 2\omega\dot{x}\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} \tag{29}$$

これらを足し合わせる．

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} \tag{30}$$

これを時間について積分すると

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + C_J = U \tag{31}$$

となるため，ヤコビ定数 C_J は

$$C_J = U - \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \tag{32}$$

となる．