数値計算実習課題 1

小川法師 (担当情報機器:joho11)

2011/7/21

問題 1

1.

中心星の運動方程式は

$$m_1\ddot{\mathbf{r_1}} = \frac{Gm_1m_2}{r^3}\mathbf{r} \tag{1}$$

惑星の運動方程式は

$$m_2\ddot{\mathbf{r_2}} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\mathbf{r} \tag{2}$$

ここで、$\mathbf{r} = \mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}$ である。(2) 式の両辺を m_2 で割った式から、(1) 式の両辺を m_1 で割った式を引くと

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(m_1+m_2)}{r^3}\mathbf{r} \tag{3}$$

が得られる。上記の式は、中心星の質量が $m_1 + m_2$ になって静止しており、その周りを惑星が運動することを示している。

2.

1 で得られた運動方程式より

$$\dot{v_x} = -\frac{G(m_1+m_2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}x \tag{4}$$

$$\dot{v_y} = -\frac{G(m_1+m_2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}y \tag{5}$$

となる。

問題 2

1.

中心星と惑星の重心は二つの座標系の原点であり、かつ、ともに x 軸上に存在しているから

$$(x_1, y_1) = (-\frac{m_2}{m_1 + m_2}, 0) = (-\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}, 0) = (-\mu_2, 0) \tag{6}$$

$$(x_2, y_2) = (\frac{m_1}{m_1 + m_2}, 0) = (\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}, 0) = (\mu_1, 0) \tag{7}$$

となる。この時 $\mu_1 + \mu_2 = 1$ である。

2.

まず、求める角度 θ は、問題文より

$$\theta = \omega t \tag{8}$$

となる。また (ξ, η) は原点を中心に (x, y) を ωt だけ回転移動させたと考えられるから

$$(\xi, \eta) = (x \cos \omega t - y \sin \omega t, x \sin \omega t + y \cos \omega t) \tag{9}$$

となる。

3.

2 で得た式を、それぞれ 2 階微分すると

$$\dot{\xi} = -(\omega x + \dot{y}) \sin \omega t + (\dot{x} - \omega y) \cos \omega t \tag{10}$$

$$\dot{\eta} = (\dot{x} - \omega y) \sin \omega t + (\omega x + \dot{y}) \cos \omega t \tag{11}$$

$$\ddot{\xi} = (-\ddot{y} - 2\omega \dot{x} + \omega^2 y) \sin \omega t + (\ddot{x} - 2\omega \dot{y} - \omega^2 x) \cos \omega t \tag{12}$$

$$\ddot{\eta} = (\ddot{x} - 2\omega \dot{y} - \omega^2 x) \sin \omega t + (\ddot{y} + 2\omega \dot{x} - \omega^2 y) \cos \omega t \tag{13}$$

が得られる。

4.

与式に、2 で得た結果をそれぞれ代入し、計算すると

$$\ddot{\xi} = (\frac{\mu_1}{{r_1}^3} + \frac{\mu_2}{{r_2}^3})y\sin\omega t - (\mu_1\frac{x+\mu_2}{{r_1}^3} + \mu_2\frac{x-\mu_1}{{r_2}^3})\cos\omega t \tag{14}$$

$$\ddot{\eta} = -(\mu_1\frac{x+\mu_2}{{r_1}^3} + \mu_2\frac{x-\mu_1}{{r_2}^3})\sin\omega t - (\frac{\mu_1}{{r_1}^3} + \frac{\mu_2}{{r_2}^3})y\cos\omega t \tag{15}$$

ここで、以上の式は時刻 t によらず成立するため、回転系における粒子 P についての運動方程式が得られる。

5.

まず、問題より

$$r_1 = \sqrt{(x+\mu_2)^2 + y^2} \tag{16}$$

$$r_2 = \sqrt{(x-\mu_1)^2 + y^2} \tag{17}$$

と書き表せるから、

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \omega^2 x - \frac{\mu_1(x+\mu_2)}{((x+\mu_2)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu_2(x-\mu_1)}{((x-\mu_1)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{18}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \omega^2 y - \frac{\mu_1 y}{((x+\mu_2)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu_2 y}{((x-\mu_1)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{19}$$

となる。
ここで 4 で求めた式と (18)、(19) 式を比べると、

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} \tag{20}$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} \tag{21}$$

が得られる。

6.

(20)、(21) 式の両辺に $\dot{x}$、$\dot{y}$ をそれぞれ掛けると

$$\dot{x}\ddot{x} - 2\omega\dot{x}\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} \tag{22}$$

$$\dot{y}\ddot{y} + 2\omega\dot{x}\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{23}$$

となり、二式を足し合わせると

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{24}$$

となる。
ここで (24) 式を時間について積分すると

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + C_J = U \tag{25}$$

となるから（C_J は積分定数）

$$C_J = U - \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \tag{26}$$

と書き表せる。