ITPASS 数値計算実習課題その１

高田 和佳　担当情報実験機:joho07

2011 年 7 月 27 日

1　2 体問題

1.1　慣性系における中心星と惑星の運動方程式

　中心星に働く力を F_{12}、惑星に働く力を F_{21}とおくと中心星の質量は m_1、惑星の質量は m_2なので、それぞれの運動方程式は

$$\boldsymbol{F_{12}} = m_1\ddot{\boldsymbol{r_1}} = m_1\frac{d^2\boldsymbol{r_1}}{dt^2} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{F_{21}} = m_2\ddot{\boldsymbol{r_1}} = m_2\frac{d^2\boldsymbol{r_2}}{dt^2} \tag{2}$$

となる。また、 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}$と万有引力の法則を用いると

$$\boldsymbol{F_{12}} = -Gm_1m_2\frac{\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2}}{|\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2}|^3} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{F_{21}} = -Gm_1m_2\frac{\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}}{|\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}|^3} \tag{4}$$

よって (1),(2),(3),(4) 式より

$$m_1\frac{d^2\boldsymbol{r_1}}{dt^2} = -Gm_1m_2\frac{\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2}}{|\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2}|^3} \tag{5}$$

$$m_2\frac{d^2\boldsymbol{r_2}}{dt^2} = -Gm_1m_2\frac{\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}}{|\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}|^3} \tag{6}$$

と書ける。ここから (5),(6) 式を整理していく。
(5) 式を両辺 m_1 で、(6) 式を両辺 m_2 で割ると

$$\frac{d^2\boldsymbol{r_1}}{dt^2} = -Gm_2\frac{\boldsymbol{r_1}-\boldsymbol{r_2}}{|\boldsymbol{r_1}-\boldsymbol{r_2}|^3} \tag{7}$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{r_2}}{dt^2} = -Gm_1\frac{\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}}{|\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}|^3} \tag{8}$$

(4) − (3) 式に、 $\boldsymbol{r = r_2 - r_1}$ 　を代入すると

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1+m_2)}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{9}$$

が求まる。$\ddot{\boldsymbol{r}}$=d$^2\boldsymbol{r}/dt^2$ より (9) は

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{G(m_1+m_2)}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{10}$$

となり、求める式を導出することが出来た。また上記の式は、二天体の相対ベクトルの式となっている。これは 2 天体の質量を足し合わせた質点が相対ベクトル上を、中心星を中心に回転運動する (ケプラー運動をする) ことを表している。

1.2　速度ベクトル

定義より

$$(\dot{v_x}, \dot{v_y}) = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \tag{11}$$

$\boldsymbol{r} = (x, y)$、(9) を用いて (11) は

$$(\dot{v_x}, \dot{v_y}) = -\frac{G(m_1+m_2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y) \tag{12}$$

と書ける。よって $\dot{v_x}$ と $\dot{v_y}$ は

$$\dot{v_x} = -\frac{G(m_1+m_2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}x \tag{13}$$

$$\dot{v_y} = -\frac{G(m_1+m_2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}y \tag{14}$$

と書くことが出来る。

2　3 体問題

2.1

中心星と惑星は x 軸上にあることから、y_1 と y_2 は共に 0 である。x 座標について考えると、二つの座標系の原点が中心星と惑星の重心であることから

$$|x_2| : |x_1| = \mu_1 : \mu_2 \tag{15}$$

(15),r=1,$\mu_1 + \mu_2 = 1$ より

$$|x_1| = 1 \times \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} = \mu_2 \tag{16}$$

$$|x_2| = 1 \times \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} = \mu_1 \tag{17}$$

よって

$$(x_1, y_1) = (-\mu_2, 0) \tag{18}$$

$$(x_2, y_2) = (\mu_1, 0) \tag{19}$$

2.2

まず、角速度の定義より $\theta = \omega t$ 　と書くことが出来る。
また、(ξ, η) は$\theta = \omega t$ を用いて

$$\xi = x\cos\omega t - y\sin\omega t \tag{20}$$

$$\eta = x\sin\omega t + y\cos\omega t \tag{21}$$

と書くことが出来る。

2.3

(20),(21) を t で微分すると

$$\dot{\xi} = (\dot{x} - \omega y)\cos\omega t - (\dot{y} + \omega x)\sin\omega t \tag{22}$$
$$\dot{\eta} = (\dot{x} - \omega y)\sin\omega t + (\dot{y} + \omega x)\cos\omega t \tag{23}$$

さらに (22),(23) を微分すると

$$\ddot{\xi} = (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)\cos\omega t - (\dot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)\sin\omega t \tag{24}$$
$$\ddot{\eta} = (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)\cos\omega t + (\dot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)\sin\omega t \tag{25}$$

以上より求める式を書くことが出来た。

2.4

準備として (18)(19)(20)(21) を用いて $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$の値をそれぞれ求める。

$$\xi_1 = x_1\cos\omega t - y_1\sin\omega t = -\mu_2\cos\omega t \tag{26}$$
$$\xi_2 = x_2\cos\omega t - y_2\sin\omega t = \mu_1\cos\omega t \tag{27}$$
$$\eta_1 = x_1\sin\omega t - y_1\cos\omega t = -\mu_2\sin\omega t \tag{28}$$
$$\eta_2 = x_2\sin\omega t - y_2\cos\omega t = \mu_1\sin\omega t \tag{29}$$

与式と (24)(25)(26)(27)(28)(29) を用いると

$$\ddot{\xi} = -\left(\mu_1\frac{x+\mu_2}{r_1^3} + \mu_2\frac{x-\mu_1}{r_2^3}\right)\cos\omega t + \left(\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}\right)y\sin\omega t \tag{30}$$
$$\ddot{\eta} = -\left(\mu_1\frac{x+\mu_2}{r_1^3} + \mu_2\frac{x-\mu_1}{r_2^3}\right)\sin\omega t + \left(\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}\right)y\cos\omega t \tag{31}$$

(30)(31) と (24)(25) より

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x = -\left[\mu_1\frac{x+\mu_2}{r_1^3} + \mu_2\frac{x-\mu_1}{r_2^3}\right] \tag{32}$$
$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y = -\left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}\right]y \tag{33}$$

よって回転系における粒子 P についての運動方程式を導出することが出来た。

2.5

r_1,r_2 の長さはそれぞれ

$$r_1 = \sqrt{(x+\mu_2)^2 + y^2} \tag{34}$$
$$r_2 = \sqrt{(x-\mu_1)^2 + y^2} \tag{35}$$

と書くことが出来る。$\frac{\mu_1}{r_1}$ と $\frac{\mu_2}{r_2}$ をそれぞれ x で偏微分すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mu_1}{r_1} &= -\frac{1}{2}\mu_1\{(x+\mu_2)^2 + y^2\}^{-\frac{2}{3}} \times (2x + 2\mu_2) \\ &= -\mu_1\frac{(x+\mu_2)}{r_1^3} \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mu_2}{r_2} &= -\frac{1}{2}\mu_2\{(x-\mu_1)^2 + y^2\}^{-\frac{2}{3}} \times (2x - 2\mu_1) \\ &= -\mu_2\frac{(x-\mu_1)}{r_1^3} \end{aligned} \tag{37}$$

同様に $\frac{\mu_1}{r_1}$ と $\frac{\mu_2}{r_2}$ をそれぞれ y で偏微分すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mu_1}{r_1} &= -\frac{1}{2}\mu_1\{(x+\mu_2)^2 + y^2\}^{-\frac{2}{3}} \times 2y \\ &= -\frac{\mu_1}{r_1^3}y \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mu_2}{r_2} &= -\frac{1}{2}\mu_2\{(x-\mu_1)^2 + y^2\}^{-\frac{2}{3}} \times 2y \\ &= -\frac{\mu_2}{r_1^3}y \end{aligned} \tag{39}$$

U を x と y でそれぞれ偏微分すると (34)(35)(36)(37) より

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \omega x^2 - \left[\mu_1\frac{(x+\mu_2)}{r_1^3} + \mu_2\frac{x-\mu_1}{r_2^3}\right] \tag{40}$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = \omega x^2 - \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}\right] y \tag{41}$$

よって、(38)(39) より (30)(31) は

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} \tag{42}$$
$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} \tag{43}$$

と書くことができ、U を用いて表すことが出来た。

2.6

(40)(41) の x 成分に $\dot{x}$ を y 成分に $\dot{y}$ をかけて足し合わせる。

$$\begin{aligned}
\dot{x}\ddot{x} - 2\omega\dot{x}\dot{y} &= \dot{x}\frac{\partial U}{\partial x} \\
\dot{y}\ddot{y} - 2\omega\dot{y}\dot{x} &= \dot{y}\frac{\partial U}{\partial y} \\
\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} &= \dot{x}\frac{\partial U}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial U}{\partial y} \\
\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} &= \frac{dx}{dt}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial U}{\partial y} \\
\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} &= \frac{dU}{dt} \qquad (44)
\end{aligned}$$

(44) を時間について積分すると

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + C_J = U \\
&C_J = U - \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \qquad (45)
\end{aligned}$$

C_Jは積分定数であり、円制限三体問題における保存量のヤコビ定数である。