ITPASS数値計算実習課題その1

0913429s 中村　望

平成23年7月30日

問題1

1.

慣性系における中心星と惑星の運動方程式は

$$m_1\ddot{\boldsymbol{r_1}} = -\frac{Gm_1m_2}{|\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}|^3}(\boldsymbol{r_1}-\boldsymbol{r_2}) \tag{1}$$

$$m_2\ddot{\boldsymbol{r_2}} = -\frac{Gm_1m_2}{|\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}|^3}(\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}) \tag{2}$$

(1) を m_1，(2) を m_2 で割り，2 式の差をとると

$$\ddot{\boldsymbol{r_2}} - \ddot{\boldsymbol{r_1}} = -\frac{G(m_1+m_2)}{|\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}|^3}(\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1})$$

相対ベクトル $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}$ を用いると

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{G(m_1+m_2)}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{3}$$

これは中心星の位置を原点とした2天体の相対運動について成り立つ方程式であり，原点に質量 m_1+m_2 の物体がある場合の運動方程式と同じである.

2.

$\ddot{\boldsymbol{r}} = (\dot{v_x}, \dot{v_y})$，$r = (x^2+y^2)^{1/2}$ だから，(3) より

$$\dot{v_x} = -\frac{G(m_1+m_2)}{(x^2+y^2)^{3/2}}x$$

$$\dot{v_y} = -\frac{G(m_1+m_2)}{(x^2+y^2)^{3/2}}y$$

問題 2

1.

2 天体の重心が座標原点なので

$$\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 = 0$$

これと $x_2 - x_1 = 1$ より

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2} \\ &= -\mu_2 \\ x_2 &= \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} \\ &= \mu_1 \end{aligned}$$

また，中心星と惑星は x 軸上にあるので

$$y_1 = y_2 = 0$$

したがって

$$(x_1, y_1) = (-\mu_2, 0)\,,\, (x_2, y_2) = (\mu_1, 0)$$

2.

時刻 $t=0$ において $\theta = 0$ だから

$$\theta = \omega t$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x\cos\omega t - y\sin\omega t \\ x\sin\omega t + y\cos\omega t \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4}$$

3.

(4) の両辺を時刻 t で微分すると

$$\dot\xi = \dot x\cos\omega t - \dot y\sin\omega t - \omega x\sin\omega t - \omega y\cos\omega t \tag{5}$$

$$\dot\eta = \dot x\sin\omega t + \dot y\cos\omega t + \omega x\cos\omega t - \omega y\sin\omega t \tag{6}$$

もう一度 (5)，(6) の両辺を時刻 t で微分して整理すると

$$\ddot\xi = (\ddot x - 2\omega\dot y - \omega^2 x)\cos\omega t - (\ddot y + 2\omega\dot x - \omega^2 y)\sin\omega t \tag{7}$$

$$\ddot\eta = (\ddot x - 2\omega\dot y - \omega^2 x)\sin\omega t + (\ddot y + 2\omega\dot x - \omega^2 y)\cos\omega t \tag{8}$$

4.
慣性座標系 (ξ, η) での運動方程式の左辺 $\ddot{\xi}, \ddot{\eta}$ に (7)，(8) を代入する．
(第一式) $\times \cos\omega t +$ (第二式) $\times \sin\omega t$ より，

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x \\
(\text{右辺}) &= \frac{\mu_1}{r_1^3}[(\xi_1 - \xi)\cos\omega t + (\eta_1 - \eta)\sin\omega t] \\
&\quad + \frac{\mu_2}{r_2^3}[(\xi_2 - \xi)\cos\omega t + (\eta_1 - \eta)\sin\omega t]
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\xi_1 - \xi &= (x_1 - x)\cos\omega t - (y_1 - y)\sin\omega t \\
&= -(x + \mu_2)\cos\omega t + y\sin\omega t \\
\eta_1 - \eta &= -(x + \mu_2)\sin\omega t - y\cos\omega t \\
\xi_2 - \xi &= -(x - \mu_1)\cos\omega t + y\sin\omega t \\
\eta_2 - \eta &= -(x - \mu_1)\sin\omega t - y\cos\omega t
\end{aligned}
$$

これらを代入して整理すると

$$
(\text{右辺}) = -\Big[\mu_1\frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2\frac{x - \mu_1}{r_2^3}\Big]
$$

よって

$$
\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x = -\Big[\mu_1\frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2\frac{x - \mu_1}{r_2^3}\Big] \tag{9}
$$

同様に，$\ddot{\xi}$，$\ddot{\eta}$ に (7)，(8) を代入して，
(第一式) $\times (-\sin\omega t) +$ (第二式) $\times \cos\omega t$ より

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y \\
(\text{右辺}) &= \frac{\mu_1}{r_1^3}[-(\xi_1 - \xi)\sin\omega t + (\eta_1 - \eta)\cos\omega t] \\
&\quad + \frac{\mu_2}{r_2^3}[-(\xi_2 - \xi)\sin\omega t + (\eta_1 - \eta)\cos\omega t] \\
&= \frac{\mu_1}{r_1^3}(-y) + \frac{\mu_2}{r_2^3}(-y) \\
&= -\Big[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}\Big]y
\end{aligned}
$$

よって

$$
\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y = -\Big[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}\Big]y \tag{10}
$$

5.
$U = \dfrac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \dfrac{\mu_1}{r_1} + \dfrac{\mu_2}{r_2}$ より

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \omega^2 x - \frac{\mu_1}{r_1^3}(x + \mu_2) - \frac{\mu_2}{r_2^3}(x - \mu_1) && (11) \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \omega^2 y - \frac{\mu_1}{r_1^3} y - \frac{\mu_2}{r_2^3} y && (12) \end{aligned}$$

(11)，(12) を (9)，(10) に代入して

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} &= \frac{\partial U}{\partial x} && (13) \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} &= \frac{\partial U}{\partial y} && (14) \end{aligned}$$

6.
(13) に $\dot{x}$，(14) に $\dot{y}$ をかけて，2 式を足すと

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y}$$
$$\frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} - (\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}) = 0$$

両辺を時刻 t について積分すると

$$U - \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = C_J$$

C_J は積分定数で，円制限 3 体問題における保存量ヤコビ定数である．