ITPASS 実習課題その 1

宮田誠也

担当情報実験機：joho08

1　問 1 の解答

1. 考える系において支配的な力は万有引力のみなので中心星と惑星に対して成り立つ運動方程式は以下の通り
中心星

$$m_1\ddot{\mathbf{r_1}} = \frac{Gm_1m_2}{r^3}\mathbf{r} \tag{1}$$

惑星

$$m_2\ddot{\mathbf{r_2}} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\mathbf{r} \tag{2}$$

ここで、(2) 式の両辺を m_2 で割った式から、(1) 式の両辺を m_1 で割った式を引くと

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(m_1+m_2)}{r^3}\mathbf{r} \tag{3}$$

が得られる。また、上記の式は、中心星（質量 m_1 の質点）の周りを質量 $m_1 + m_2$ の質点が楕円運動をしていることを表している。また、働く力の向きと相対ベクトルの向きが平行であるため、角運動量も保存される。以上より上記の運動方程式はケプラー運動をしていると考えられる。

2. 1. で得られた運動方程式より

$$\dot{v_x} = -\frac{G(m_1+m_2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}x \tag{4}$$

$$\dot{v_y} = -\frac{G(m_1+m_2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}y \tag{5}$$

となる。

2　問 2 の解答

1. 二つの座標系の原点が中心星と惑星の重心であり、かつ、ともに x 軸上に存在していることから

$$(x_1, y_1) = (-\frac{m_2}{m_1 + m_2}, 0) = (-\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}, 0) = (-\mu_2, 0) \tag{6}$$

$$(x_2, y_2) = (\frac{m_1}{m_1 + m_2}, 0) = (\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}, 0) = (\mu_1, 0) \tag{7}$$

となる。この時 $\mu_1 + \mu_2 = 1$ であることを用いた。

2. まず、求める角度 θ は問題文より

$$\theta = \omega t \tag{8}$$

となる。また (ξ, η) は原点を中心に (x, y) を ωt 回転移動させたと考えられるから

$$(\xi, \eta) = (x\cos(\omega t) - y\sin(\omega t), x\sin(\omega t) + y\cos(\omega t)) \tag{9}$$

となる。

3. 2. で得られた式をそれぞれ二階微分すると

$$\ddot{\xi} = (-\ddot{y} - 2\omega\dot{x} + \omega^2 y)\sin(\omega t) + (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)\cos(\omega t) \tag{10}$$

$$\ddot{\eta} = (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)\sin(\omega t) + (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)\cos(\omega t) \tag{11}$$

が得られる。

4. 与式に 2. で得られた結果をそれぞれ代入し、計算すると

$$\ddot{\xi} = (\frac{\mu_1}{{r_1}^3} + \frac{\mu_2}{{r_2}^3})y\sin(\omega t) - (\mu_1\frac{x + \mu_2}{{r_1}^3} + \mu_2\frac{x - \mu_1}{{r_2}^3})\cos(\omega t) \tag{12}$$

$$\ddot{\eta} = -(\mu_1\frac{x + \mu_2}{{r_1}^3} + \mu_2\frac{x - \mu_1}{{r_2}^3})\sin(\omega t) - (\frac{\mu_1}{{r_1}^3} + \frac{\mu_2}{{r_2}^3})y\cos(\omega t) \tag{13}$$

ここで (10) 式と (12) 式、(11) 式と (13) 式それぞれについて考えてみると以上の式は時刻 t によらず成立するので、問題文にあるような回転系における粒子 P についての運動方程式が得られる。

5. まず、問題文より

$$r_1 = \sqrt{(x+\mu_2)^2 + y^2} \tag{14}$$

$$r_2 = \sqrt{(x-\mu_1)^2 + y^2} \tag{15}$$

と書き表せるから、

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \omega^2 x - \frac{\mu_1(x+\mu_2)}{((x+\mu_2)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu_2(x-\mu_1)}{((x-\mu_1)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{16}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \omega^2 y - \frac{\mu_1 y}{((x+\mu_2)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu_2 y}{((x-\mu_1)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{17}$$

となる。
ここで 4. で求めた方程式と (16)、(17) 式を比べてみると、

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} \tag{18}$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} \tag{19}$$

が得られる。

6. (18)、(19) 式の両辺に $\dot{x}$、$\dot{y}$ をそれぞれ掛け合わせると

$$\dot{x}\ddot{x} - 2\omega\dot{x}\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} \tag{20}$$

$$\dot{y}\ddot{y} + 2\omega\dot{x}\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} \tag{21}$$

となり、2 式を足し合わせると

$$\begin{aligned} \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} &= \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} \\ &= \dot{U} \end{aligned} \tag{22}$$

となる。
ここで (22) 式を時間について積分すると

$$\frac{1}{2}(\dot{x} + \dot{y}) + C_J = U \tag{23}$$

となるから（C_J は積分定数）

$$C_J = U - \frac{1}{2}(\dot{x} + \dot{y}) \tag{24}$$

と書き表せる。