ITPASS レポート 01

佐藤緩奈

2011 年 7 月 15 日

問題 1

1.

m_1 と m_2 において運動方程式を立てると

$$m_1\ddot{\mathbf{r_1}} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$m_2\ddot{\mathbf{r_2}} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

上の 2 式の辺々を足し合わせて

$$\ddot{\mathbf{r_1}} - \ddot{\mathbf{r_2}} = -G\frac{(m_1+m_2)}{r^3}\mathbf{r}$$

相対ベクトル $\mathbf{r} = \mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}$ を用いると

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r_1}} - \ddot{\mathbf{r_2}} = -G\frac{(m_1+m_2)}{r^3}\mathbf{r}$$

これら 2 天体は楕円軌道上を運動すると考えられる。

2.

$r = (x, y)$ より、

$$\dot{r} = (\dot{x}, \dot{y}) = (v_x, v_y)$$

もう一度 r を微分すると、$\dot{v_x}, \dot{v_y}$ はそれぞれ速度成分なので、

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\dot{v_x}, \dot{v_y})\ddot{r} = (\dot{v_x}, \dot{v_y}) = -G\frac{m_1+m_2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y)$$

これより

$$\dot{v_x} = -G\frac{m_1+m_2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}x$$

$$\dot{v_y} = -G\frac{m_1+m_2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}y$$

問題 2

1.

r=1,$\mu_1+\mu_2=1$, 中心星、惑星が x 軸上にあることから重心から中心星までの距離は

$$1\times\frac{m_2}{m_1+m_2}=\frac{\frac{\mu_2}{G}}{\frac{\mu_1}{G}+\frac{\mu_2}{G}}=\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}=\mu_2$$

重心から惑星までの距離は

$$1\times\frac{m_1}{m_1+m_2}=\frac{\frac{\mu_1}{G}}{\frac{\mu_1}{G}+\frac{\mu_2}{G}}=\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}=\mu_1$$

よって

$$(x_1,y_1)=(-\mu_2,0)$$

$$(x_2,y_2)=(\mu_1,0)$$

2.

$$\theta=\omega t$$

(ζ , η) を (x,y) に変換する回転行列を $\mathbf{R}$ と置くと

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} cos(\omega t) & -sin(\omega t) \\ sin(\omega t) & cos(\omega t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \mathbf{R}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{cases} \xi = xcos(\omega t) - ysin(\omega t) \\ \eta = xsin(\omega t) + ycos(\omega t) \end{cases}$$

3.

2.2 で求めた ξ と η をそれぞれ 2 階微分する

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= \dot{x}sin(\omega t) + \omega xcos(\omega t) + \dot{y}cos(\omega t) - \omega ysin(\omega t) \\ \ddot{\eta} &= \ddot{x}sin(\omega t) + \omega\dot{x}cos(\omega t) + \omega\dot{x}cos(\omega t) - \omega^2 xsin(\omega t) \\ &\quad + \ddot{y}cos(\omega t) - \omega\dot{y}sin(\omega t) - (\omega\dot{y}sin(\omega t) + \omega^2 ycos(\omega t))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)cos(\omega t) + (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)sin(\omega t) \\
\dot{\xi} &= \dot{x}cos(\omega t) - \omega x sin(\omega t) - (\dot{y}sin(\omega t) + \omega y cos(\omega t)) \\
\ddot{\xi} &= \ddot{x}cos(\omega t) - \omega\dot{x}sin(\omega t) - (\omega\dot{x}sin(\omega t) + \omega^2 x cos(\omega t)) \\
&\quad - \left\{\ddot{y}sin(\omega t) + \omega\dot{y}cos(\omega t) - \omega\dot{y}cos(\omega t) + \omega^2 y sin(\omega t)\right\} \\
&= -(\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)sin(\omega t) + (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)cos(\omega t)
\end{aligned}
$$

4.

問題文の $\ddot{\xi}$ と $\ddot{\eta}$ を 2.3 で求めた式に代入する。

$$
\begin{aligned}
\ddot{\xi} &= \mu_1\frac{\xi_1 - \xi}{r_1^3} + \mu_2\frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3} \\
&= (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)cos(\omega t) - (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)sin(\omega t) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ddot{\eta} &= \mu_1\frac{\eta_1 - \eta}{r_1^3} + \mu_2\frac{\eta_2 - \eta}{r_2^3} \\
&= (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)cos(\omega t) - (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)sin(\omega t) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

(1) 式に両辺 $cos(\omega t)$、(2) 式に $sin(\omega t)$ をかけると

$$
\left(\mu_1\frac{\xi_1 - \xi}{r_1^3} + \mu_2\frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3}\right)cos(\omega t) = \\
(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)cos^2(\omega t) - (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)sin(\omega t)cos(\omega t)
$$

$$
\left(\mu_1\frac{\eta_1 - \eta}{r_1^3} + \mu_2\frac{\eta_2 - \eta}{r_2^3}\right)sin(\omega t) = \\
(\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)cos(\omega t)sin(\omega t) - (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)sin^2(\omega t)
$$

辺々足し合わせると

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x &= \mu_1\frac{\xi_1 cos(\omega t) - \xi cos(\omega t) + \eta_1 sin(\omega t) - \eta sin(\omega t)}{r_1^3} \\
&= \mu_2\frac{\xi_2 cos(\omega t) - \xi cos(\omega t) + \eta_2 sin(\omega t) - \eta sin(\omega t)}{r_2^3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x &= \mu_1\frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2\frac{x_2 - x}{r_2^3} \\
&= -\left[\mu_1\frac{x - x_1}{r_1^3} + \mu_2\frac{x - x_2}{r_2^3}\right] \\
&= -\left[\mu_1\frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2\frac{x - \mu_1}{r_2^3}\right] \qquad (3)
\end{aligned}
$$

($\because$ 1.1 より $x_1 = -\mu_2$、$x_2 = \mu_1$)

同様に (1) 式に両辺 $sin(\omega t)$、(2) 式に両辺 $cos(\omega t)$ をかけて

$$\begin{aligned}
\left(\mu_1 \frac{\xi_1 - \xi}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3}\right) sin(\omega t) = \\
(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)cos(\omega t)sin(\omega t) - (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)sin^2(\omega t) \\
\left(\mu_1 \frac{\eta_1 - \eta}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\eta_2 - \eta}{r_2^3}\right) cos(\omega t) = \\
(\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)cos^2(\omega t) + (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)sin(\omega t)cos(\omega t)
\end{aligned}$$

これらを整理すると

$$\begin{aligned}
\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y &= \mu_1 \frac{-\xi_1 sin(\omega t) - \eta_1 cos(\omega t) + \xi sin(\omega t) - \eta sin(\omega t)}{r_1^3} \\
&= \mu_2 \frac{-\xi_2 sin(\omega t) + \eta_2 cos(\omega t) + \xi sin(\omega t) - \eta cos(\omega t)}{r_2^3} \\
&= \mu_1 \frac{y_1 - y}{r_1^3} + \mu_2 \frac{y_2 - y}{r_2^3} \\
&= -\left[\mu_1 \frac{-y}{r_1^3} + \mu_2 \frac{-y}{r_2^3}\right] \\
&= -\left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}\right] y \qquad (4)
\end{aligned}$$

（$\because$ 2.1 より $y_1 = 0$、$y_2 = 0$）よって導出できた。

5.

$P(x, y), \quad (x_1, y_1) = (-\mu_2, 0), \quad (x_2, y_2) = (\mu_1, 0)$ より三平方の定理を用いて

$$\begin{aligned}
r_1 &= \sqrt{(x + \mu_2)^2 + y^2} \\
r_2 &= \sqrt{(\mu_1 - x)^2 + y^2} \\
\frac{\mu_1}{r_1} &= \frac{\mu_1}{((x + \mu_2)^2 + y^2))^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

$\frac{\mu_1}{r_1}$ を x で偏微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mu_1}{r_1} &= -\frac{1}{2}\frac{\mu_1(2x + 2\mu_2)}{\{(x + \mu_2)^2 + y^2\}^{\frac{3}{2}}} \\
&= -\mu_1 \frac{(x + \mu_2)}{r_1^3}
\end{aligned}$$

同様にして

$$\frac{\mu_2}{r_2} = \frac{\mu_2}{((\mu_1 - x)^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$\frac{\mu_2}{r_2}$ を x で偏微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mu_2}{r_2} &= -\frac{1}{2}\frac{\mu_2(2x - 2\mu_1)}{\{(\mu_1 - x)^2 + y^2\}^{\frac{3}{2}}} \\
&= -\mu_2\frac{(x - \mu_1)}{r_2^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U &= \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \\
\frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}\right) \\
&= \omega^2 x - \left[\mu_1\frac{(x + \mu_2)}{r_1^3} + \mu_2\frac{(x - \mu_1)}{r_2^3}\right] ((3)\text{ 式を用いた}) \\
&= \ddot{x} - 2\omega\dot{y}
\end{aligned}$$

同様に y でも偏微分する。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mu_2}{r_1} &= -\frac{1}{2}\frac{\mu_1 \cdot 2y}{\{(x + \mu_2)^2 + y^2\}^{\frac{3}{2}}} \\
&= -\mu_1\frac{y}{r_1^3} \\
\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mu_2}{r_2} &= -\frac{1}{2}\frac{\mu_2 \cdot 2y}{\{(x + \mu_2)^2 + y^2\}^{\frac{3}{2}}} \\
&= -\mu_2\frac{y}{r_2^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}\right) \\
&= \omega^2 y - \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}\right] y((4)\text{ 式を用いた}) \\
&= \ddot{y} - 2\omega\dot{x}
\end{aligned}$$

以上より

$$\left\{\begin{array}{l} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} = \frac{\partial \quad U}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} \end{array}\right.$$

6.

2.5 より

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} \tag{5}$$
$$\ddot{y} - 2\omega\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} \tag{6}$$

(5) 式に $\dot{x}$,(6) 式に $\dot{y}$ を両辺かけて辺々足し合わせると

$$\begin{aligned}\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} &= \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right) \\ &= \frac{dU}{dt}\end{aligned}$$

時間で積分する。積分定数を C_J と置くと

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 + C_J = U$$

よって

$$C_J = U - \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$