数値計算実習課題その１

藤田 哲也　宇宙物理学研究室　 B4

1

万有引力の法則

$$F = -\frac{GMm}{r^2}$$

をベクトルで表すと、

$$\boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{1}$$

となる。中心星が惑星から受ける力を $\boldsymbol{F_1}$ 、惑星が中心星から受ける力を $\boldsymbol{F_2}$ とする。$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}$ より、$r = |\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}|$ なので、(1) より、$\boldsymbol{F_1}$ と $\boldsymbol{F_2}$ はそれぞれ

$$\boldsymbol{F_1} = -\frac{Gm_1m_2}{|\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2}|^3}(\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2}) = \frac{Gm_1m_2}{r^3}\boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{F_2} = -\frac{Gm_1m_2}{|\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}|^3}(\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}) = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\boldsymbol{r}$$

となる。よって、慣性系における中心星と惑星の運動方程式は、それぞれ

$$\boldsymbol{F_1} = \frac{Gm_1m_2}{r^3}\boldsymbol{r} = m_1\frac{d^2\boldsymbol{r_1}}{dt^2} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{F_2} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\boldsymbol{r} = m_2\frac{d^2\boldsymbol{r_2}}{dt^2} \tag{3}$$

と書ける。$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}$ より、両辺 t の二階微分をとると、

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{d^2\boldsymbol{r_2}}{dt^2} - \frac{d^2\boldsymbol{r_1}}{dt^2}$$

となるので、これに (2) と (3) を代入すれば、

$$\begin{aligned}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} &= -\frac{Gm_2}{r^3}\boldsymbol{r} - \frac{Gm_1}{r^3}\boldsymbol{r} \\ &= -\frac{G(m_1+m_2)}{r^3}\boldsymbol{r}\end{aligned}$$

これは相対ベクトルを用いて表された運動方程式であり、中心星から見たときの惑星の相対運動を表している。これを解くことで、中心星に対して惑星がどのような軌道で運動するかがわかる。

2

速度の定義より、

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = (\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt})$$

である。これと $\boldsymbol{r} = (x, y)$ を用いると、1．の結果より、

$$(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}) = -\frac{G(m_1 + m_2)}{(x + y)^{3/2}}(x, y)$$

と表せる。よって、それぞれの成分は、

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{(x + y)^{3/2}}x$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{(x + y)^{3/2}}y$$