ITPASS 数値計算実習課題その1

関　友也 (joho 01)

平成 22 年 7 月 21 日

1　問題1

　支配的な力は万有引力のみなので、質量が m_1、位置ベクトルが $\vec{r_1}$ で表される中心星についての運動方程式は

$$m_1 \frac{d^2}{dt^2}\vec{r_1} = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}|^3}\vec{r} \tag{1}$$

となる。
質量が m_2、位置ベクトルが $\vec{r_2}$ で表される惑星についての運動方程式は

$$m_2 \frac{d^2}{dt^2}\vec{r_2} = \frac{-Gm_1m_2}{|\vec{r}|^3}\vec{r} \tag{2}$$

となる。ここで、$\vec{r}$ は

$$\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1} \tag{3}$$

であらわされる相対ベクトルである。(2) 式から (1) 式を引いて整理すると

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = \frac{-G(m_1+m_2)}{r^3}\vec{r} \tag{4}$$

となり式が導出できた。

この式では、単位質量あたりの質点が惑星から中心星へ向かう方向へ右辺のような力を受けて運動することを表している。相対運動を考えることにより、中心星の質量が $m_1 + m_2$ になって静止しておりその周りを惑星が運動しているかのように式を扱うことができる。

2　問題2

問題 1 で導出した (4) 式に $\vec{r} = (x.y)$ を代入する。
ここで

$$|\vec{r}|^2 = x^2 + y^2 \tag{5}$$

なので (4) 式は

$$\frac{d^2}{dt^2}(x, y) = \frac{-G(m_1 + m_2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y) \tag{6}$$

となる。
左辺を少し変形して

$$\frac{d}{dt}(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}) = \frac{-G(m_1 + m_2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y) \tag{7}$$

ここで

$$(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}) = (v_x, v_y) \tag{8}$$

なので (4) 式は $(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt})$、$(x, y)$ を用いて

$$\frac{d}{dt}(v_x, v_y) = \frac{-G(m_1 + m_2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y) \tag{9}$$

というように表すことができる。