

ITPASS 実習 レポート 2

矢敷沙也加 情報実験機 : joho 14

平成 22 年 7 月 28 日

問題 1

中心星の質量を m_1 、惑星の質量を m_2 とする。

また、中心星の位置を r_1 、惑星の位置を r_2 とする。

中心星に対して成り立つ運動方程式は

$$m_1 \frac{d^2 r_1}{dt^2} = G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \quad (1)$$

となる。

また、惑星に対して成り立つ運動方程式は

$$m_2 \frac{d^2 r_2}{dt^2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \quad (2)$$

となる。

ここで、(1) の両辺を m_1 で割ると

$$\frac{d^2 r_1}{dt^2} = G \frac{m_2}{r^3} \vec{r} \quad (3)$$

同様に、(2) の両辺を m_2 で割ると

$$\frac{d^2 r_2}{dt^2} = -G \frac{m_1}{r^3} \vec{r} \quad (4)$$

となる。

(4)-(3) より

$$\frac{d^2 r_2}{dt^2} - \frac{d^2 r_1}{dt^2} = -G \frac{m_1}{r^3} \vec{r} - G \frac{m_2}{r^3} \vec{r} \quad (5)$$

ここで、 \vec{r} は $\vec{r} = r_2 - r_1$ で表される相対ベクトルであるから、(5) は

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} \vec{r} \quad (6)$$

となる。

(6) 式は、中心星と惑星の相対運動を表している。

ここで、(6) 式の右辺に $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ をかけて整理すると

$$\left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right) \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1 m_2)}{r^3} \vec{r} \quad (7)$$

また、

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \equiv \mu$$

として

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1 m_2)}{r^3} \vec{r} \quad (8)$$

(8) 式は中心星の位置を原点とし、惑星の質量を $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \equiv \mu$ に置き換えた時の運動を表すことになる。

これにより一体問題であるかのように扱うことができる。

問題 2

$$\vec{r} = (x, y)$$

$$\vec{v} \equiv (v_x, v_y) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$$

であるから、(6) の左辺は

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(x, y) = \frac{d}{dt}(v_x, v_y) \quad (9)$$

となる。

また、 $r^2 = x^2 + y^2$ であるから、(6) の右辺は

$$-\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} \vec{r} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}(x, y) \quad (10)$$

となる。

(9)、(10) より

$$\frac{d}{dt}(v_x, v_y) = -\frac{G(m_1 + m_2)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}(x, y) \quad (11)$$

よって、

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}x \quad (12)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}y \quad (13)$$

と表せる。