数値計算実習課題その 1

塩崎淳也

2010 年 7 月 15 日提出

1　問題 1 の解答

中心星、惑星に対して成り立つ運動方程式は、それぞれ

$$m_1 \frac{d^2\mathbf{r_1}}{dt^2} = G\frac{m_1 m_2}{r^3}\mathbf{r} \tag{1}$$

$$m_2 \frac{d^2\mathbf{r_2}}{dt^2} = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\mathbf{r} \tag{2}$$

となる。また、$\mathbf{r}$ は相対ベクトルなので

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r_2}}{dt^2} - \frac{d^2\mathbf{r_1}}{dt^2} \tag{3}$$

ここで、(2) 式を m_2 で割った式から、(1) 式を m_2 で割った式を引くと

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mathbf{r_2}}{dt^2} - \frac{d^2\mathbf{r_1}}{dt^2} &= -G\frac{m_1}{r^3}\mathbf{r} - G\frac{m_2}{r^3}\mathbf{r} \\ &= -\frac{G(m_1+m_2)}{r^3}\mathbf{r}\end{aligned}$$

となり、求める式

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1+m_2)}{r^3}\mathbf{r} \tag{4}$$

が求められた。

考察：$\mathbf{r} = \mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}$ より、(3) 式は中心星に対する惑星の相対運動を表わしているものとわかる。式をみると力は $\mathbf{r}$ 方向にのみ働いていることが分かる。このことから中心星と惑星は互いに引き合い、条件 (位置, 初速度, 質量) に依存して様々な軌道を描く円運動をすると考えられる。

2　問題 2 の解答

$\mathbf{r} = (x, y)$ より、(3) 式を書き換えて、

$$\frac{d^2}{dt^2}(x, y) = -\frac{G(m_1+m_2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y) \tag{5}$$

ここで $\frac{d}{dt}(x, y) = (v_x, v_y)$ なので、(4) 式より

$$\left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}\right) = -\frac{G(m_1+m_2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y) \tag{6}$$