ITPASS数値計算実習課題その１

地球惑星科学科　３回生　津田彰子

2010年６月25日（金）出題分

1　ベクトル表示の運動方程式

1.1　慣性系における、中心星と惑星に成り立つ運動方程式

万有引力の法則は

$$F = -G\frac{mM}{r^2} \tag{1}$$

であるためこれを用いると、

中心星における運動方程式は

$$\vec{F_{中}} = -G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r_1}-\vec{r_2}|^2}\frac{(\vec{r_1}-\vec{r_2})}{|\vec{r_1}-\vec{r_2}|} \tag{2}$$

となる。同様に、惑星における運動方程式は

$$\vec{F_{惑}} = -G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r_2}-\vec{r_1}|^2}\frac{(\vec{r_2}-\vec{r_1})}{|\vec{r_2}-\vec{r_1}|} \tag{3}$$

となる。なお、中心星の質量を m_1、位置ベクトルを $\vec{r_1}$、惑星の質量を m_2、位置ベクトルを $\vec{r_2}$ とした。(中心星に及ぼされる力を $\vec{F_{中}}$、惑星に及ぼされる力を $\vec{F_{惑}}$ とした。)

1.2　相対ベクトルを用いた運動方程式

(2) の両辺を m_1 で割ると

$$\frac{d^2\vec{r_1}}{dt^2} = G\frac{m_2}{r^3}\vec{r} \tag{4}$$

となる。また、(3) の両辺を m_2 で割ると

$$\frac{d^2\vec{r_2}}{dt^2} = -G\frac{m_1}{r^3}\vec{r} \tag{5}$$

となる。なお、$\vec{r}$=$\vec{r_2}$-$\vec{r_1}$ の相対ベクトルとしている。ここで、

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r_2}}{dt^2} - \frac{d^2\vec{r_1}}{dt^2} \tag{6}$$

であるので、(5)-(4) より

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -G\frac{(m_1+m_2)}{r^3}\vec{r} \tag{7}$$

が導出される。また、この運動方程式は、２体の天体がケプラー運動をしていることが分かる。

2　運動方程式の成分表示

１で求めた運動方程式を成分に分けることを考える。$\vec{r}$=(x,y)、$\vec{v}$=(v_x,v_y) であることから

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -G\frac{m_1+m_2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}x \tag{8}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -G\frac{m_1+m_2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}y \tag{9}$$

となる。