数値計算実習課題その１

小倉匠真　担当情報実験機名　joho02

提出期限　７月１５日 (木)

1　問題１の解答

中心星、惑星の質量をそれぞれ m_1,m_2、位置ベクトルをそれぞれ $\mathbf{r}_1$,$\mathbf{r}_2$ とする.

i. 中心星に対して成立する運動方程式

$$m_1\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2) \tag{1}$$

ii. 惑星に対して成立する運動方程式

$$m_2\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1) \tag{2}$$

ここで

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1 \tag{3}$$

で表される相対ベクトル $\mathbf{r}$ を導入する.
(3) 式の両辺を t に関して２階微分する.

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\\ &= \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2}-\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2}\end{aligned} \tag{4}$$

(4) 式に (1) 式と (2) 式を代入する.

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= -\frac{Gm_1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)+\frac{Gm_2}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\\ &= -\frac{G(m_1+m_2)}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\\ &= -\frac{G(m_1+m_2)}{r^3}\mathbf{r}\end{aligned} \tag{5}$$

これで

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1+m_2)}{r^3}\mathbf{r} \tag{6}$$

が導出された.

また、(5) 式÷ (m_1+m_2) , (5) 式× m_1m_2　とすると

$$\mu\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\mathbf{r} \qquad (\text{換算質量}:\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}) \tag{7}$$

となり、(7) 式は中心星を原点とした、換算質量 μ をもった惑星の運動を表す式として扱うことが出来る.

2　問題２の解答

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r} &= (x, y) \\
r &= \sqrt{x^2 + y^2}
\end{aligned}
$$

であるから、(5) 式は

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3}\mathbf{r} \\
&= -\frac{G(m_1 + m_2)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}(x, y) \qquad (8)
\end{aligned}
$$

とかける. また、$\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$ より

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \\
&= (\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}) \qquad (9)
\end{aligned}
$$

であるから、(8) 式と (9) 式の右辺を比較して

$$
\begin{aligned}
\frac{dv_x}{dt} &= -\frac{G(m_1 + m_2)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}x \\
\frac{dv_y}{dt} &= -\frac{G(m_1 + m_2)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}y
\end{aligned}
$$

が導かれる.