ITPASS数値計算実習課題その１

大西響子

平成 22 年 7 月 20 日

1　慣性系において、中心星と惑星に対して成り立つ運動方程式

中心星と惑星の運動方程式はそれぞれ、

$$m_1 \frac{d^2\mathbf{r_1}}{dt^2} = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2}|^3}(\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2}) \tag{1}$$

$$m_2 \frac{d^2\mathbf{r_2}}{dt^2} = -\frac{Gm_2m_1}{|\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1}|^3}(\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1}) \tag{2}$$

となる。

これから２つの式を整理していく。

(１) 式は両辺 m_1 で割り、(２) 式は両辺 m_2 で割って、

$$\frac{d^2\mathbf{r_1}}{dt^2} = -\frac{Gm_2}{|\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2}|^3}(\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2}) \tag{3}$$

$$\frac{d^2\mathbf{r_2}}{dt^2} = -\frac{Gm_1}{|\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1}|^3}(\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1}) \tag{4}$$

と書ける。ここで、(４) 式ー (３) 式を計算し、相対ベクトル　$\mathbf{r} = (\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1})$ を導入すると、

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1}) = -\frac{G}{|\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1}|^3}(m_1+m_2)(\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1}) \tag{5}$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1+m_2)}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r} \tag{6}$$

これで、問題文の式が導けた。
この式で表される運動は、中心星の系から惑星の相対的な運動を見たときの記述である。
惑星の相対的な加速度が中心星との距離の二乗に反比例し、さらに加速度は惑星から中心星の方を指す向きを持つので、この運動は原点 (中心星) を中心とした円運動をしていると考えられる。

2　運動方程式を成分に分ける

問題文の定義に従うと、

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{7}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \tag{8}$$

と書ける。ここで、

$$\mathbf{a} \equiv (a_x, a_y) = (\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_{\mathrm{y}}}{dt}) = (\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}) \tag{9}$$

と定義できる。これは１の (６) 式を xy 成分に分けたものなので、

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G\left(m_1 + m_2\right)}{\left|\mathbf{r}\right|^3}\mathbf{r} \tag{10}$$

となる。だから

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{G\left(m_1 + m_2\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}x \tag{11}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{G\left(m_1 + m_2\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}y \tag{12}$$

と表せる。