【0722修正版】ITPASS数値計算実習課題その１

大西響子

平成 22 年 7 月 22 日

1　慣性系において、中心星と惑星に対して成り立つ運動方程式

中心星と惑星の運動方程式はそれぞれ、

$$m_1 \frac{d^2\mathbf{r_1}}{dt^2} = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2}|^3}(\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2}) \tag{1}$$

$$m_2 \frac{d^2\mathbf{r_2}}{dt^2} = -\frac{Gm_2m_1}{|\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1}|^3}(\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1}) \tag{2}$$

となる。

これから２つの式を整理していく。

(１) 式は両辺 m_1 で割り、(２) 式は両辺 m_2 で割って、

$$\frac{d^2\mathbf{r_1}}{dt^2} = -\frac{Gm_2}{|\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2}|^3}(\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2}) \tag{3}$$

$$\frac{d^2\mathbf{r_2}}{dt^2} = -\frac{Gm_1}{|\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1}|^3}(\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1}) \tag{4}$$

と書ける。ここで、(４) 式ー (３) 式を計算し、相対ベクトル　$\mathbf{r}=\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1}$ を導入すると、

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1}) = -\frac{G}{|\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1}|^3}(m_1+m_2)(\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1}) \tag{5}$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1+m_2)}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r} \tag{6}$$

これで、問題文の式が導けた。
今まで二体問題を考えてきたが、相対ベクトルを導入することにより、このように二つの運動方程式を一つの式で表せることが分かる。

この式は二つの天体の質量を足した大きさの質量をもつものについての運動方程式になっていて、原点ともう一つの天体の間に働く力は中心力のみであることを示す。
つまりこの式は、相対ベクトルの矢印の指す側にある天体が、矢印のもとにある天体のまわりを、ある平面内において回転運動するという運動を示していると考えられる。

2　運動方程式を成分に分ける

問題文の定義に従うと、

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{7}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \tag{8}$$

と書ける。ここで、

$$\boldsymbol{a} \equiv (a_x, a_y) = (\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_{\mathrm{y}}}{dt}) = (\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}) \tag{9}$$

と定義できる。これは１の (6) 式を xy 成分に分けたものなので、

$$\boldsymbol{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G\,(m_1 + m_2)}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r} \tag{10}$$

となる。だから

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} \tag{11}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{G\,(m_1 + m_2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}x \tag{12}$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} \tag{13}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{G\,(m_1 + m_2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}y \tag{14}$$

と表せる。