ITPASS 数値計算実習課題その１

情報実験機番号：joho10　氏名：竹内英彦

1　中心星とその惑星の間に成り立つ関係式

まず中心星と惑星の間に成り立つ運動方程式を考える。
質量 m_1 の中心星と, 質量 m_2 の惑星のみが存在すると仮定する。万有引力定数を G とし, それぞれの運動方程式は

$$\mathbf{F_1} = m_1 \frac{d^2\mathbf{r_1}}{dt^2} = -G\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2}|^2}\frac{\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2}}{|\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2}|} \tag{1}$$

$$\mathbf{F_2} = m_2 \frac{d^2\mathbf{r_2}}{dt^2} = -G\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1}|^2}\frac{\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1}}{|\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1}|} \tag{2}$$

と表すことができる。
大きさが r の相対ベクトル $\mathbf{r} = \mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}$ を用いて

$$m_1 \frac{d^2\mathbf{r_1}}{dt^2} = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\mathbf{r} \tag{3}$$

$$m_2 \frac{d^2\mathbf{r_2}}{dt^2} = G\frac{m_1 m_2}{r^3}\mathbf{r} \tag{4}$$

と書くことができる。
ここで (3),(4) の両辺をそれぞれ m_1 と m_2 で割って差を取る

$$\frac{d^2\mathbf{r_1}}{dt^2} - \frac{d^2\mathbf{r_2}}{dt^2} = -G\frac{m_2}{r^3}\mathbf{r} - G\frac{m_1}{r^3}\mathbf{r} \tag{5}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}) = -G\frac{(m_1+m_2)}{r^3}\mathbf{r} \tag{6}$$

$\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}$ は, 相対ベクトル $\mathbf{r}$ のことなので

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -G\frac{(m_1+m_2)}{r^3}\mathbf{r} \tag{7}$$

が得られる。
中心星を原点においた系で考えた時,(7) 式を $m_1 + m_2$ の質量をもつ中心星の周りを単位質量の惑星が運動していると捉えることが出来る。これによって二体問題を, 単位質量の惑星が原点方向に $-G\frac{(m_1+m_2)}{r^3}\mathbf{r}$ の力を受けながら運動していると置き換えて考えることができる。

2　運動方程式の成分分解

上の (7) 式に $\mathbf{r} = (x, y)$ を代入してみる。$|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2}$ なので

$$\frac{d^2}{dt^2}(x, y) = -G\frac{(m_1+m_2)}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}(x, y) \tag{8}$$

(8) を整理して

$$\frac{d}{dt}(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}) = -G\frac{(m_1+m_2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(x,y) \tag{9}$$

ここで,$\mathbf{v} \equiv (v_x, v_y) = (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$ より (9) 式を書き換えて

$$\frac{d}{dt}v_x = -G\frac{(m_1+m_2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}x \tag{10}$$

$$\frac{d}{dt}v_y = -G\frac{(m_1+m_2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}y \tag{11}$$

が得られる。