数値計算実習課題その1

情報実験機 07　　　　小林 英貴

平成 22 年 7 月 12 日

1　問題

万有引力の法則

$$F = -\frac{GMm}{r^2}$$

を用いて、惑星の軌道を計算することを考えてみよう。簡単のため、考える系における支配的な力は万有引力のみであるとする。いま、質量がである中心星と、質量がである惑星のみで構成される惑星系を考える。また中心性及び惑星の位置はベクトルで表されるとする。

1. 慣性系において、中心星と惑星に対して成り立つ運動方程式を書け。またそれらから

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r}$$

を導出せよ。ここで $\mathbf{r}$ は $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ で表される相対ベクトルとする。このとき、上記運動方程式で表される運動がどのようなものかを考えよ。

2. 1. の運動方程式を成分に分けることを考えよう。簡単のため、二体は同一平面上を運動しているとする。相対ベクトル $\mathbf{r} = (x, y)$ に対して、速度を

$$\mathbf{v} \equiv (v_x, v_y) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$$

と定義する。このとき、 $\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_x}{dt}$ を x, y を用いて表せ。

2　解答

1. 中心星と惑星についての運動方程式を立てる。

$$\begin{cases} m_1\frac{d^2r_1}{dt^2} & = -F_1 & = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \\ m_2\frac{d^2r_2}{dt^2} & = \quad F_2 & = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \end{cases}$$

のようになる。よって、

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r}$$

が導出された。上の式を、

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GMm}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

と変形すると、$\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ は中心星から惑星に向かう単位ベクトル。この中心星と惑星の 2 質点は、内力が中心力で外力が働かないから、内部角運動量が保存する。

2. 速度の定義、

$$\mathbf{v} \equiv (v_x, v_y) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$$

を利用すると、$\frac{dv_x}{dt}$ と $\frac{dv_y}{dt}$ は次のようになる。

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} & = \frac{d}{dt}\frac{dx}{dt} & = \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{dv_x}{dt} & = \frac{d}{dt}\frac{dx}{dt} & = \frac{d^2x}{dt^2} \end{cases}$$