【修正】数値計算実習課題その1

情報実験機 07　　氏名：小林 英貴

修正期限：平成 22 年 7 月 22 日 (木)

問　題

万有引力の法則

$$F = -\frac{GMm}{r^2}$$

を用いて、惑星の軌道を計算することを考えてみよう。簡単のため、考える系における支配的な力は万有引力のみであるとする。いま、質量が m_1 である中心星と、質量が m_2 である惑星のみで構成される惑星系を考える。また中心星及び惑星の位置はベクトル $\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}$ で表されるとする。

問題 1.

慣性系において、中心星と惑星に対して成り立つ運動方程式を書け。またそれらから

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{G(m_1+m_2)}{r^3}\mathbf{r}$$

を導出せよ。

ここで $\mathbf{r}$ は $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ で表される相対ベクトルとする。このとき、上記運動方程式で表される運動がどのようなものかを考えよ。

問題 2.

1. の運動方程式を成分に分けることを考えよう。簡単のため、二体は同一平面上を運動しているとする。相対ベクトル $\mathbf{r} = (x, y)$ に対して、速度を

$$\mathbf{v} \equiv (v_x, v_y) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$$

と定義する。

このとき、 $\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_x}{dt}$ を x, y を用いて表せ。

解　答

解答 1.

　中心星と惑星についての運動方程式を立てる。
　万有引力の法則は、万有引力を F、2 物体の質量をそれぞれ M と m、2 物体間の距離を r、万有引力定数を G とすると、

$$F = -\frac{GMm}{r^2}$$

で表される。
　ここで質量 m_1 の中心星及び質量 m_2 の惑星のみで構成される惑星系を考える。それぞれの星の大きさは無視して、中心に質量が集中する質点と考える。
　ある点を原点に取り、そこから中心星、惑星までの位置ベクトルを、それぞれ $\mathbf{r_1}$、$\mathbf{r_2}$ とする。
　この系に存在する力は万有引力のみなので、中心星に働く力を $\mathbf{F_1}$、惑星に働く力を $\mathbf{F_2}$ として、運動方程式を立てると

$$m_1 \frac{d^2\mathbf{r_1}}{dt^2} = \mathbf{F}_1 = \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2} \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \tag{1}$$

$$m_2 \frac{d^2\mathbf{r_2}}{dt^2} = \mathbf{F}_2 = \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \tag{2}$$

となる。
　相対ベクトルを $\mathbf{r}$ として、$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ を用いて、(1) 式と (2) 式を変形すると、

$$m_1 \frac{d^2\mathbf{r_1}}{dt^2} = \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \tag{3}$$

$$m_2 \frac{d^2\mathbf{r_2}}{dt^2} = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \tag{4}$$

となる。
　(3) 式の両辺を m_1、(4) 式の両辺を m_2 で割ると、

$$\frac{d^2\mathbf{r_1}}{dt^2} = \frac{Gm_2}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \tag{5}$$

$$\frac{d^2\mathbf{r_2}}{dt^2} = -\frac{Gm_1}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \tag{6}$$

となる。
　よって、(6) 式ー (5) 式を行うと

$$\frac{d^2(\mathbf{r_2} - \mathbf{r_1})}{dt^2} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \tag{7}$$

つまり

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1+m_2)}{|\mathbf{r}|^2}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \tag{8}$$

より、$|\mathbf{r}| = r$ なので、

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1+m_2)}{r^3}\mathbf{r}$$

が導出された。

(8) 式において、$\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ は中心星から惑星に向かう単位ベクトル。

この中心星と惑星の 2 質点は、内力が中心力で外力が働かない。また、導出された式は相対ベクトル $\mathbf{r}$ の式で、 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ であることから、相対運動を表していることが分かる。以上より、中心星と惑星は互いに引き合う力によって運動をしていて、条件 (互いの距離や質量、初期の位置や速度) に依存して様々な軌道を描く。

また、(3) 式 (4) 式より

$$m_1\frac{d^2\mathbf{r_1}}{dt^2} + m_2\frac{d^2\mathbf{r_2}}{dt^2} = 0 \tag{9}$$

であり、重心 $\mathbf{r_G}$ は、

$$\mathbf{r_G} = \frac{m_1\mathbf{r_1} + m_2\mathbf{r_2}}{m_1+m_2} \tag{10}$$

なので、(9) 式 (10) 式から $\frac{d^2\mathbf{r_G}}{dt^2} = 0$ となるから、中心星と惑星の重心は等速直線運動をすると分かる。

解答 2.

1. の運動方程式を成分に分ける。相対ベクトル $\mathbf{r}$ を $\mathbf{r} = (x, y)$ とする。

速度の定義、

$$\mathbf{v} \equiv (v_x, v_y) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$$

を利用すると、$\frac{dv_x}{dt}$ と $\frac{dv_y}{dt}$ は次のようになる。

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{11}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{dy}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \tag{12}$$

$|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2}$ より 、1. で導出した式

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1+m_2)}{r^3}\mathbf{r}$$

を変形すると、

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{G(m_1+m_2)}{(x+y)^{\frac{3}{2}}}x \tag{13}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{G(m_1+m_2)}{(x+y)^{\frac{3}{2}}}y \tag{14}$$

求めるべき式、$(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt})$ は (9) 式〜(12) 式を使って

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{G(m_1+m_2)}{(x+y)^{\frac{3}{2}}}x$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{G(m_1+m_2)}{(x+y)^{\frac{3}{2}}}y$$

と分かる。