ITPASS 数値計算実習課題 その1

板倉　統
担当情報実験機名：joho01

平成 22 年 7 月 22 日

問題 1

慣性系において、質量 m_1 の中心星と質量 m_2 の惑星に対して成り立つ運動方程式を求め、$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$ で表される相対ベクトル $\overrightarrow{r}$ を用いて

$$\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3}\overrightarrow{r}$$

を導出する。

中心星と惑星に加わる力の大きさ F は、万有引力の法則より

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

である。

$\overrightarrow{r}$ 方向の単位ベクトルは $\frac{1}{r}\overrightarrow{r}$ であることから、中心星の運動方程式は

$$m_1\frac{d^2\overrightarrow{r_1}}{dt^2} = F\frac{1}{r}\overrightarrow{r}$$

より、

$$m_1\frac{d^2\overrightarrow{r_1}}{dt^2} = \frac{Gm_1m_2}{|\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}|^3}(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1})$$

である。

同様に、惑星の運動方程式は

$$m_2\frac{d^2\overrightarrow{r_2}}{dt^2} = -F\frac{1}{r}\overrightarrow{r}$$

より、

$$m_2\frac{d^2\overrightarrow{r_2}}{dt^2}=\frac{Gm_1m_2}{|\overrightarrow{r_1}-\overrightarrow{r_2}|^3}(\overrightarrow{r_1}-\overrightarrow{r_2})$$

である。

以上から、

$$\frac{d^2\overrightarrow{r_1}}{dt^2}=\frac{Gm_2}{r^3}\overrightarrow{r} \tag{1}$$

$$\frac{d^2\overrightarrow{r_2}}{dt^2}=-\frac{Gm_1}{r^3}\overrightarrow{r} \tag{2}$$

である。

ここで、

$$\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2}=\frac{d^2}{dt^2}(\overrightarrow{r_2}-\overrightarrow{r_1})=\frac{d^2\overrightarrow{r_2}}{dt^2}-\frac{d^2\overrightarrow{r_1}}{dt^2}$$

に (1) (2) を代入すると

$$\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2}=-\frac{G(m_1+m_2)}{r^3}\overrightarrow{r}$$

となる。

これは $\overrightarrow{r}$ の場所にある物体は $-\overrightarrow{r}$ の方向に加速度 $\frac{G(m_1+m_2)}{r^2}$ で加速されることを表しており、中心星の方向に惑星が加速度 $\frac{G(m_1+m_2)}{r^2}$ で加速している様子が分かる。

問題 2

二体が同一平面上を運動していて、相対ベクトル $\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して速度を

$$\overrightarrow{v} \equiv \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}$$

と定義するとき、$\frac{dv_x}{dt}$ と $\frac{dv_y}{dt}$ を $x,\, y$ を用いて表す。

$|\overrightarrow{r}| = \sqrt{x^2+y^2}$ なので、

$$\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1+m_2)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

である。よって、

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 r_x}{dt^2} = -\frac{G(m_1+m_2)x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 r_y}{dt^2} = -\frac{G(m_1+m_2)y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

である。