数値計算実習課題その１　（6/25日出題分）

船津圭佑 joho02

2010年7月22日修正

課題1 慣性系において中心星と惑星の間に成り立つ運動方程式を考える
万有引力の法則は

$$F = -\frac{GmM}{r^2}$$

中心星の質量は m_1 位置ベクトルは $\vec{r_1}$ 速度ベクトル $\vec{r_1}$　惑星の質量は m_2 位置ベクトルは $\vec{r_2}$ 速度ベクトル $\vec{v_2}$ また$\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$ $\vec{v} = \vec{v_2} - \vec{v_1}$とおく
中心星における運動方程式は

$$m_1 \frac{d\vec{v_1}}{dt} = -\frac{Gm_1m_2}{|\vec{r_1} - \vec{r_2}|^3}(\vec{r_1} - \vec{r_2})$$

惑星における運動方程式は

$$m_2 \frac{d\vec{v_2}}{dt} = -\frac{Gm_1m_2}{|\vec{r_1} - \vec{r_2}|^3}(\vec{r_2} - \vec{r_1})$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{d\vec{v_2}}{dt} - \frac{d\vec{v_1}}{dt} \\
&= -\frac{Gm_1}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|^3}(\vec{r_2} - \vec{r_1}) + \frac{Gm_2}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|^3}(\vec{r_1} - \vec{r_2}) \\
&= -\frac{G(m_1 + m_2)}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|^3}(\vec{r_2} - \vec{r_1}) \\
&= -\frac{G(m_1 + m_2)}{|\vec{r}|^3}(\vec{r}) \\
\frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}
\end{aligned}$$

以上から

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{|\vec{r}|^3}(\vec{r})$$

この運動方程式はケプラー運動を表している

課題2. 二天体が同一平面上を運動しているとすると相対ベクトル $\vec{r} = (x, y)$ に対して速度を

$$\vec{v} = (\vec{v_x}, \vec{v_y}) = (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}) \text{ と定義する}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{なので}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y)$$

$$\text{である、よって}$$

$$\frac{d\vec{v_x}}{dt} = \frac{d^2\vec{r_x}}{dt^2} = -\frac{G(m_1 + m_2)x}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{d\vec{v_y}}{dt} = \frac{d^2\vec{r_y}}{dt^2} = -\frac{G(m_1 + m_2)y}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$$

となる