itpass 実習数値計算編　2016 年 12 月 12 日

2016 年 12 月 19 日

2022 年　5 月 16 日

数値積分法

目次

- 区分求積法
- 台形法（台形公式）
- シンプソン法（シンプソンの公式）
- その他の方法に対するコメント

数値積分法
はじめに (1)

- 関数を積分したいことはしばしばあるだろう.
- しかし, 関数を解析的に積分するのは, 一般には簡単ではない. 一方, それに比べれば数値積分するのは超簡単である(こともある).
- ここでは, 下の数値積分法について考える.
  - 区分求積法
  - 台形法
  - シンプソン法

数値積分法
はじめに (2)

- ここでは, $y = f(x)$ を $\mathrm{a} \leq x \leq b$ の範囲で積分することを考える.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

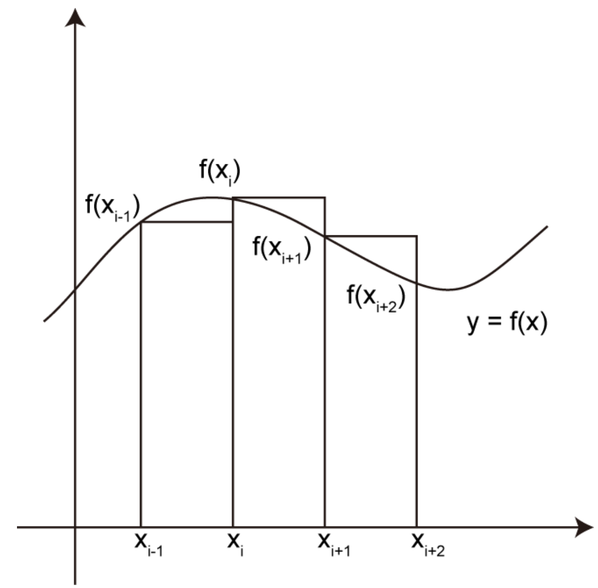
数値積分法
区分求積法 (1)

- 最も簡単な方法は, 幅の等しい「短冊」に区切って, その面積を足すことである.
- つまり, 下のようになる.

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim \sum_{i=1}^{N} f(x_i)h = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)w_i$$

$$x_i = a + h(i-1)$$

$$w_i = h = \frac{b-a}{N}$$



- この方法は, 区分求積法と呼ばれる(らしい).

数値積分法
区分求積法 (2)

- 区分求積法の精度を考えよう.
- 先に考えた区分求積法は, $a \leq x \leq b$ を N 個に区切って, それぞれを一定値で近似し, その和を求める. したがって, 区分求積法の精度は, 各区分を一定値で近似することの善し悪しで決まる.
- まずは, ある区分, $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, の積分の精度を考えよう.
  - N 個の和としての区分求積法の精度は, $N = \frac{b-a}{h}$ 倍となる.

数値積分法
区分求積法 (3)

- $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ の積分を下のような記号で書くことにする.

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

$$I_{a,i} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = F(x_{i+1}) - F(x_i)$$

数値積分法
区分求積法 (4)

- これより式変形すると下のように書ける.

$$I_{a,i} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = F(x_{i+1}) - F(x_i)$$

$$= F(x_i) + \frac{dF(x_i)}{dx}h + \frac{1}{2!}\frac{d^2F(x_i)}{dx^2}h^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3F(x_i)}{dx^3}h^3 + O(h^4) - F(x_i)$$

$$= f(x_i)h + \frac{1}{2!}\frac{df(x_i)}{dx}h^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3F(x_i)}{dx^3}h^3 + O(h^4) \qquad (h = x_{i+1} - x_i)$$

- また, 区分求積法での積分は下のように書ける.

$$I_{n,i} = f(x_i)h \qquad (h = x_{i+1} - x_i)$$

数値積分法
区分求積法 (5)

- これより, 区分求積法の誤差は下のように表される.

$$I_{n,i} - I_{a,i} = -\frac{1}{2!}\frac{df(x_i)}{dx}h^2 - \frac{1}{3!}\frac{d^2f(x_i)}{dx^2}h^3 + O(h^4)$$

- したがって, $a \leq x \leq b$ の領域の区分求積法は, (h の)1 次精度である.

$$I_n - I_a = \sum_i^N I_{n,i} - I_{a,i} \sim N \times O(h^2) = \frac{b-a}{h} \times O(h^2) \sim O(h)$$

練習問題

- 下の計算を行いなさい.

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$$

1. 解析的に値を求めなさい.
2. 区分求積法を用いて数値的に値を求めるプログラムを作りなさい. また, 領域の分割数に対して値がどのように変化するか調べなさい. さらに, その値と解析的に求めた値を比べなさい.

数値積分法
台形法 (1)

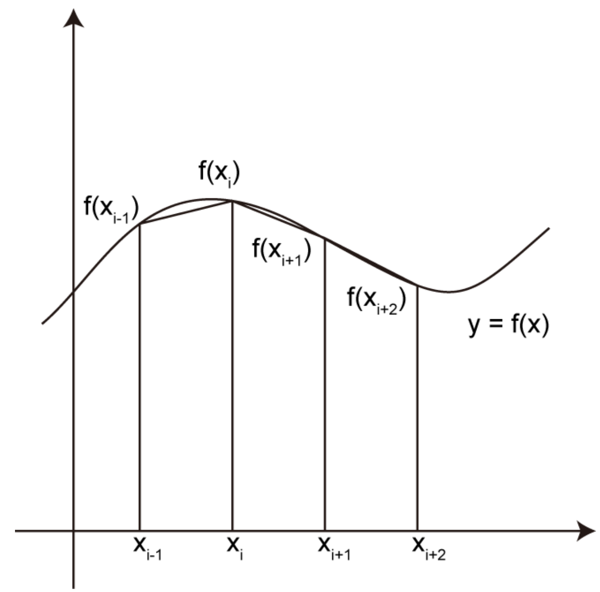
- 別の方法は, 等間隔に区切った区間 $(x_i \leq x \leq x_{i+1})$ を台形で近似し, その面積を足すことである.
- つまり, 下のようになる.

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}\big(f(x_i)+f(x_{i+1})\big)h = \sum_{i=1}^{N+1} f(x_i) w_i$$

$$x_i = a + h(i-1)$$

$$w_i = h = \frac{b-a}{N} \quad (i = 2,3,\ldots,N),$$

$$w_1 = \frac{h}{2}, \quad w_{N+1} = \frac{h}{2}$$



- この方法は, 台形法と呼ばれる.

数値積分法
台形法 (2)

- 台形法の精度を考えよう.
- ある区分の積分は下のように書ける.

$$I_{a,i} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = F(x_{i+1}) - F(x_i)$$

$$= F(x_i) + \frac{dF(x_i)}{dx}h + \frac{1}{2!}\frac{d^2F(x_i)}{dx^2}h^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3F(x_i)}{dx^3}h^3 + O(h^3) - F(x_i)$$

$$= f(x_i)h + \frac{1}{2!}\frac{df(x_i)}{dx}h^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^2f(x_i)}{dx^2}h^3 + O(h^4)$$

$$= \frac{1}{2}f(x_i)h + \frac{1}{2}\left\{f(x_i) + \frac{df(x_i)}{dx}h + O(h^2)\right\}h + O(h^3)$$

$$= \frac{1}{2}\{f(x_i) + f(x_{i+1})\}h + O(h^3) \qquad (h = x_{i+1} - x_i)$$

数値積分法
台形法 (3)

- また, 台形法での積分は下のように書ける.

$$I_{n,i} = \frac{1}{2}\{f(x_i) + f(x_{i+1})\}h$$

- これより, 台形法の誤差は下のように表される.

$$I_{n,i} - I_{a,i} = O(h^3)$$

- したがって, $a \leq x \leq b$ の領域の台形法は,（hの）2 次精度である.

$$I_n - I_a = \sum_{i}^{N} I_{n,i} - I_{a,i} \sim N \times O(h^3) = \frac{b-a}{h} \times O(h^3) \sim O(h^2)$$

練習問題

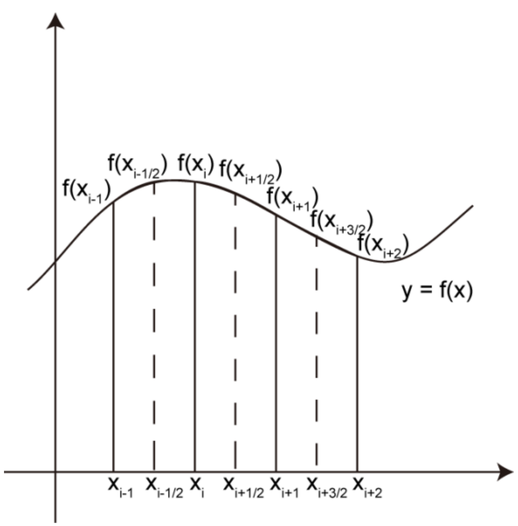
- 下の計算を行いなさい.

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$$

1. 台形法を用いて数値的に値を求めるプログラムを作りなさい. また, 領域の分割数に対して値がどのように変化するか調べなさい. さらに, その値と区分求積法, および解析的に求めた値を比べなさい.

数値積分法
シンプソン法 (1)

- 台形法は, 積分領域を区切った区分, $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ を一次関数で近似しそれを積分することに相当する.
- そのように考えると, 区分を二次関数で近似すればより良い計算ができそうな気がする.



数値積分法
シンプソン法 (2)

- $(x_i, y_i), (x_{i+1/2}, y_{i+1/2}), (x_{i+1}, y_{i+1})$ の 3 点を通る多項式は下のように書ける.

$$f(x) = \frac{(x - x_{i+1/2})(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1/2})(x_i - x_{i+1})} y_i + \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i+1/2} - x_i)(x_{i+1/2} - x_{i+1})} y_{i+1/2} + \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1/2})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+1/2})} y_{i+1}$$

- 積分区間を 2N 個の等間隔領域に分割し, 各区間の幅を下のように置く.
  - $x_{i+1} - x_{i+1/2} = x_{i+1/2} - x_i = \frac{h}{2}$
- このとき, 上の近似式は下のようになる.

$$f(x) = \frac{2}{h^2}(x - x_{i+1/2})(x - x_{i+1}) y_i - \frac{4}{h^2}(x - x_i)(x - x_{i+1}) y_{i+1/2} + \frac{2}{h^2}(x - x_i)(x - x_{i+1/2}) y_{i+1}$$

数値積分法
シンプソン法 (2)

- この式を, $x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1}$ の範囲で積分すると下のようになる.

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \frac{h}{6}\{f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-1}) + f(x_{i+1})\}$$

- これより, $a \leq x \leq b$ の範囲の積分は下のように表される.

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim \sum_{i=1}^{N} \frac{h}{6}\{f(x_{2i-1}) + 4f(x_{2i}) + f(x_{2i+1})\}$$

$$x_i = a + h(i-1), \qquad h = \frac{b-a}{2N}$$

数値積分法
シンプソン法 (2)

- 式を変形すると下のように整理できる.

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim \sum_{i=1}^{N} \frac{h}{6}\{f(x_{2i-1}) + 4f(x_{2i}) + f(x_{2i+1})\}$$

$$= \frac{h}{6}\left\{f(x_1) + 4\sum_{i=1}^{N} f(x_{2i}) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_{2i+1}) + f(x_{2N+1})\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{2N+1} f(x_i) w_i$$

$$x_i = a + h(i-1)$$

$$w_1 = \frac{h}{6}, \qquad w_i = h = \frac{b-a}{2N} \ \ (i = 2,3,\ldots,2N-1), \qquad w_{2N} = \frac{h}{6}$$

数値積分法
シンプソン法 (3)

- シンプソン法の精度を考えよう.
- ある区分の積分は下のように書ける.

$$I_{a,i} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = F(x_{i+1}) - F(x_i)$$

$$= F(x_i) + \frac{dF(x_i)}{dx}h + \frac{1}{2!}\frac{d^2F(x_i)}{dx^2}h^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3F(x_i)}{dx^3}h^3 + O(h^4) - F(x_i)$$

$$= f(x_i)h + \frac{1}{2!}\frac{df(x_i)}{dx}h^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^2f(x_i)}{dx^2}h^3 + O(h^4)$$

数値積分法
シンプソン法 (4)

$$I_{a,i} = \frac{1}{6} f(x_i) h + \frac{4}{6} \left\{ f(x_i) + \frac{df(x_i)}{dx} \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \frac{d^2 f(x_i)}{dx^2} \left(\frac{h}{2} \right)^2 + O(h^3) \right\} h$$

$$+ \frac{1}{6} \left\{ f(x_i) + \frac{df(x_i)}{dx} h + \frac{1}{2} \frac{d^2 f(x_i)}{dx^2} h^2 + O(h^3) \right\} h + O(h^4)$$

$$= \frac{1}{6} \left\{ f(x_i) + 4 f\left(x_{i+1/2}\right) + f(x_{i+1}) \right\} h + O(h^4) \qquad (h = x_{i+1} - x_i)$$

数値積分法
シンプソン法 (5)

- また, シンプソン法での積分は下のように書ける.

$$I_{n,i} = \frac{1}{6}\{f(x_i) + 4f\left(x_{i+1/2}\right) + f(x_{i+1})\}h$$

- これより, シンプソン法の誤差は下のように表される.

$$I_{n,i} - I_{a,i} = O(h^4)$$

- したがって, $a \le x \le b$ の領域のシンプソン法は,（h の）3 次精度である.

$$I_n - I_a = \sum_i^N I_{n,i} - I_{a,i} \sim N \times O(h^4) = \frac{b-a}{h} \times O(h^4) \sim O(h^3)$$

練習問題

- 下の計算を行いなさい.

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$$

1. シンプソン法を用いて数値的に値を求めるプログラムを作りなさい. また, 領域の分割数に対して値がどのように変化するか調べなさい. さらに, その値と区分求積法, 台形法, および解析的に求めた値を比べなさい.

数値積分法
その他の方法（コメント） (1)

- これまでに考えてきた方法を見てみると, 数値積分は, 要するに下のように計算するだけである.

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim \sum_{i=1}^{N} f(x_i) w_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = b - a$$

- すなわち, 数値積分法の善し悪しは x_i, w_i の選び方にある.

数値積分法
その他の方法（コメント） (2)

- これまでに見てきた方法では, x_i を等間隔にとり, 重みを適切に決めることで, より良い結果を得ようとしてきた.
- しかし, x_i を自由にとることができるならば, 数値積分の結果が良くなるように x_iを選べば, 精度を上げることができるような気がするだろう.

数値積分法
その他の方法(コメント) (3)

- 区分求積法のように, データを 1 点使う積分において, 積分点を適切に選ぶことを考えよう.
- ある区分の積分は下のように書ける.

$$I_{a,i} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = F(x_{i+1}) - F(x_i)$$

$$= F(x_i) + \frac{dF(x_i)}{dx}h + \frac{1}{2!}\frac{d^2F(x_i)}{dx^2}h^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3F(x_i)}{dx^3}h^3 + O(h^4) - F(x_i)$$

$$= f(x_i)h + \frac{1}{2!}\frac{df(x_i)}{dx}h^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^2f(x_i)}{dx^2}h^3 + O(h^4)$$

数値積分法
その他の方法（コメント）(4)

$$I_{a,i} = \left\{ f(x_i) + \frac{df(x_i)}{dx}\frac{1}{2}h + O(h^2) \right\} h + O(h^4)$$

$$= f\left(x_i + \frac{1}{2}h \right) h + O(h^3) \qquad (h = x_{i+1} - x_i)$$

数値積分法 その他の方法（コメント） (5)

- したがって,

$$I_{n,i} = f\left(x_i + \frac{1}{2}h\right)h$$

のように計算するとき, この積分法の誤差は下のように表される.

$$I_{n,i} - I_{a,i} = O(h^3)$$

- したがって, データを 1 点しか使わないにも関わらず, データ点を区間の中心に取るだけで区分求積法よりも精度が良い計算が可能である.

数値積分法
その他の方法（コメント）(6)

- 同様の考え方で, データを 2 点使う積分において, 積分点を適切に選ぶことを考えよう. ただし, ここでは 2 点のうちの 1 点の場所のみ工夫する.
- ある区分の積分は下のように書ける.

$$I_{a,i} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = F(x_{i+1}) - F(x_i)$$

$$= F(x_i) + \frac{dF(x_i)}{dx}h + \frac{1}{2!}\frac{d^2F(x_i)}{dx^2}h^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3F(x_i)}{dx^3}h^3 + O(h^4) - F(x_i)$$

$$= f(x_i)h + \frac{1}{2!}\frac{df(x_i)}{dx}h^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^2f(x_i)}{dx^2}h^3 + O(h^4)$$

数値積分法
その他の方法（コメント）(7)

$$I_{a,i} = \frac{1}{4} f(x_i)h + \frac{3}{4}\left\{f(x_i) + \frac{df(x_i)}{dx}\frac{2}{3}h + \frac{1}{2}\frac{d^2 f(x_i)}{dx^2}\left(\frac{2}{3}h\right)^2 + O(h^3)\right\} h$$

$$+O(h^4)$$

$$= \frac{1}{4}\left\{f(x_i) + 3f\left(x_i + \frac{2}{3}h\right)\right\} h + O(h^4) \qquad (h = x_{i+1} - x_i)$$

数値積分法
その他の方法(コメント) (8)

- したがって,

$$I_{n,i} = \frac{1}{4}\left\{f(x_i) + 3f\left(x_i + \frac{2}{3}h\right)\right\}h$$

- のように計算するとき, この積分法の誤差は下のように表される.

$$I_{n,i} - I_{a,i} = O(h^4)$$

- したがって, データを 2 点使った台形法よりも精度が良い積分が可能である.

数値積分法
その他の方法（コメント） (9)

- 上の方法で, もう一点の位置も工夫することでさらに精度は良くなるはずである.
  - でも, 途中でやめました.

- 同様な方針で, データ点の位置も工夫した積分法としてよく使われるのが, ガウスの求積法である. ガウスの求積法では, データ数 N のとき, 2N-1 次の精度となる.

おまけ

温度風

- 温度風の関係を使って東西風速を計算してみなさい.

温度風の関係は, 温度の水平勾配と風速の鉛直勾配の関係であり, 下のように表される.

$$\frac{\partial u}{\partial p} = \frac{R}{fp}\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial \phi}$$

ここで, p, ϕ, a, R, f, u, T はそれぞれ圧力, 緯度, 惑星半径, 気圧定数, コリオリパラメータ, 東西風, 温度である.

- 温度のデータは, この資料があるディレクトリ以下にある (はず).