itpass 実習数値計算編　2016 年 11 月 28 日
2022 年　7 月　6 日

補間法

目次

- ラグランジュ補間
- スプライン補間

補間法
はじめに

- 様々なデータを解析する際, 離散的なデータの間のある点における値を求めたいことがあるだろう.
- ここでは下の方法について考える.
  - ラグランジュ補間
  - スプライン補間

補間法
ラグランジュ補間 (1)

- 下のようなデータがあるとする.

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)$$

- このとき, この離散的なデータの間の点, $x = X$ における y の値を推定しよう.
- 最も(？)簡単な方法は, 下のようにすることである.

$$x_i < X < x_{i+1} \text{のとき,}$$

$$y = \frac{x_{i+1} - X}{x_{i+1} - x_i} y_i + \frac{X - x_i}{x_{i+1} - x_i} y_{i+1}$$

補間法
ラグランジュ補間 (2)

- これは, 重み付き平均である.
- しかし同時に, これは, $x_i < X < x_{i+1}$の区間の値を一次関数で近似したことに対応する.

練習問題

- 下の URL のファイルに含まれている, wangara/Data_Aug17LT12H.data を使い, データ間を一次関数で近似することで 900 hPa における温度と温位を計算しなさい.
  - https://itpass.scitec.kobe-u.ac.jp/seminar/lecture/fy2016/160916/pub/wangara.tgz
- ダウンロードおよびファイルの展開の方法は以下.

```
$ wget http://itpass.scitec....（上の URL）
$ tar xvf wangara.tgz
$ lv wangara/Data_Aug17LT12H.data
```

参考

配列 (5)

- 下の内容の atm.f90 を作成して実行しよう.
  - Wangara の観測データを使用することに注意.

```
program atm
  implicit none
  integer, parameter :: nz = 31
  real(8) :: height(nz), temp(nz), press(nz)
  integer :: k
  open(50, file='wangara/Data_Aug17LT12H.data', status='unknown')
  read(50, *)
  do k = 1, nz
    read(50, *) height(k), press(k), temp(k)
  end do
  close(50)
  do k = 1, nz
    write(6, *) temp(k), height(k)
  end do
end program atm
```

補間法
ラグランジュ補間 (3)

- 先の場合には, データ間を一次関数で近似したが, 二次関数を使えばより近似が正確になるような気がするだろう.
- このときは, ある二次関数, $y = ax^2 + bx + c$, が次の 3 点を通ることを条件に, 係数を決めればよい.

$$(x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$$

補間法 ラグランジュ補間 (4)

- つまり, 下の連立一次方程式から, a, b, c を決めればよい.

$$y_{i-1} = a{x_{i-1}}^2 + bx_{i-1}x + c$$
$$y_i = a{x_i}^2 + bx_ix + c$$
$$y_{i+1} = a{x_{i+1}}^2 + bx_{i+1}x + c$$

補間法
ラグランジュ補間 (5)

- 同様に考えると, 三次関数を使えば…
- このときは, ある三次関数, $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, は下の連立一次方程式を解いて決めればよい.

$$
\begin{aligned}
y_{i-2} &= a{x_{i-2}}^3 + b{x_{i-2}}^2 + cx_{i-2} + d \\
y_{i-1} &= a{x_{i-1}}^3 + b{x_{i-1}}^2 + cx_{i-1} + d \\
y_i &= a{x_i}^3 + b{x_i}^2 + cx_i + d \\
y_{i+1} &= a{x_{i+1}}^3 + b{x_{i+1}}^2 + cx_{i+1} + d
\end{aligned}
$$

補間法
ラグランジュ補間 (6)

- と言ったことを考えていくと, 下のように一般化することができそうである.
  - データ点を通る x の多項式でデータ点の間を近似.
    - n 次の多項式を使うためには, n+1 個のデータが必要.
- このときの多項式は, 下のように書くことができる.

$$y = \cdots + \frac{\ldots(X-x_{i-2})(X-x_i)(X-x_{i+1})\ldots}{\ldots(x_{i-1}-x_{i-2})(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})\ldots} y_{i-1} + \frac{\ldots(X-x_{i-2})(X-x_{i-1})(X-x_{i+1})\ldots}{\ldots(x_i-x_{i-2})(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots} y_i$$
$$+ \frac{\ldots(X-x_{i-2})(X-x_{i-1})(X-x_i)\ldots}{\ldots(x_{i+1}-x_{i-2})(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)\ldots} y_{i+1} + \cdots$$

- この方法はラグランジュ補間法と呼ばれる.

練習問題

- 先の温度データを用いて, 800 hPa から 1000 hPa の間の温度を 1 hPa ごとに計算し, 図を描きなさい. ただし, 1 次, 2 次, 3 次のラグランジュ補間を用いること.

補間法
スプライン補間 (0)

- 補間法は, 要するに, 何かしらの関数を使ってデータ点の間を近似すればよい.
  - 考えることは,
    - どのような関数を使うのか?
    - どのような条件を課すのか?

  である.
- ラグランジュ補間では, 多項式を用いて, データ点を通る(近似関数が連続である)ことを条件とした.

補間法
スプライン補間 (1)

- 例えば, 二つのデータ間（ $x_i \le x \le x_{i+1}$ の区間）ごとに, 近似関数を決めることを考えよう.
- つまり,
  - …
  - $y = f_{i-1}(x)$ $\quad$ $for \quad x_{i-1} \le x \le x_i$
  - $y = f_i(x)$ $\quad$ $for \quad x_i \le x \le x_{i+1}$
  - $y = f_{i+1}(x)$ $\quad$ $for \quad x_{i+1} \le x \le x_{i+2}$
  - …

  とする.

補間法
スプライン補間 (2)

- ここで, 近似関数には二次関数, $y = f_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$ を用いることにすると, 下の条件を課すことで区分的な多項式を求めることができる.
  - …
  - $y_{i-1} = f_{i-1}(x_{i-1})$　　　$y_i = f_{i-1}(x_i)$
  - $y_i = f_i(x_i)$　　　$y_{i+1} = f_i(x_{i+1})$
  - $y_{i+1} = f_{i+1}(x_{i+1})$　　　$y_{i+2} = f_{i+1}(x_{i+2})$
  - …
  - $f_{i-1}{}'(x_i) = f_i{}'(x_i)$
  - $f_i{}'(x_{i+1}) = f_{i+1}{}'(x_{i+1})$
  - …
  - $f_1{}'(x_1) = f_R{}'$　or　$f_{N-1}{}'(x_N) = f_L{}'$

補間法
スプライン補間 (3)

- この式を整理すると,
  $\ldots, a_{i-1}, b_{i-1}, c_{i-1}, a_i, b_i, c_i, a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}, \ldots$
  に対する連立一次方程式になる... でしょ?

- この方法は 2 次のスプライン補間と呼ばれる.

補間法
スプライン補間 (4)

- スプライン補間は, 通常は 3 次の多項式が使われる（ようだ）.
- 3 次多項式を用いる際には, 二階微分が連続であることを条件として課す.