itpass 実習数値計算編　2016 年 10 月 31 日
2018 年　7 月　9 日
2022 年　6 月 23 日

計算機で連立一次方程式を解こう

目次

- 計算機で連立一次方程式を解く

計算機で連立一次方程式を解く
はじめに

- 次の連立一次方程式を解こう.

$$a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z = b_1$$
$$a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z = b_2$$
$$a_{3,1}x + a_{3,2}y + a_{3,3}z = b_3$$

- このような方程式を解く方法は大きく分けて下の二つの種類がある.
  - 直接法
  - 反復法
- ここでは, 直接法の一つであるガウス･ジョルダンの消去法を考える.

計算機で連立一次方程式を解く ガウス･ジョルダンの消去法 (1)

- 先の方程式は下のように書き直すことができる.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} a_{1,2} a_{1,3} \\ a_{2,1} a_{2,2} a_{2,3} \\ a_{3,1} a_{3,2} a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

- そして ,この方程式を解くためには, 何らかの方法で下のように変形すればよい.

$$\begin{pmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

計算機で連立一次方程式を解く ガウス･ジョルダンの消去法 (2)

- 具体的には下の方程式を考える.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 4 & 10 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 40 \end{pmatrix}$$

計算機で連立一次方程式を解く ガウス・ジョルダンの消去法 (3)

- 方程式は下のような手順で変形すればよい.

1. 1 行目を 2 $(= a_{1,1})$で割る.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 4 & 10 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 40 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 8 \\ 4 & 10 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 16 \\ 40 \end{pmatrix}$$

2. 1 行目に 2 $(= a_{2,1})$をかけ, 2 行目から引く.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 10 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 40 \end{pmatrix}$$

3. 1 行目に 4 $(= a_{3,1})$をかけ, 3 行目から引く

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

計算機で連立一次方程式を解く ガウス･ジョルダンの消去法 (4)

4. 2 行目を 2 $(= a_{2,2})$ で割る.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. 2 行目に 2 $(= a_{3,2})$ をかけ, 3 行目から引く.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

計算機で連立一次方程式を解く ガウス･ジョルダンの消去法 (5)

6. 3 行目を -4 $(= a_{3,3})$ で割る.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

7. 3 行目に 1 $(= a_{2,3})$ をかけ, 2 行目から引く

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

8. 3 行目に 3 $(= a_{1,3})$ をかけ, 1 行目から引く

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

計算機で連立一次方程式を解く ガウス･ジョルダンの消去法 (6)

7. 2 行目に 2 $(= a_{1,2})$ をかけ, 1 行目から引く.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- この方法がガウス･ジョルダンの消去法である.
  - なお, この方法では, 行列の対角成分がゼロの場合, 工夫が必要である（ピボット選択）.

練習問題 1

- ガウス･ジョルダンの消去法を用いて下の方程式の解を求めるプログラムを作りなさい.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 4 & 10 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 40 \end{pmatrix}$$

  - 可能ならば, 任意の数の連立方程式を解くプログラムを作りなさい.
  - 方針
    - まずは左辺の行列と右辺のベクトルを表す配列（2 次元配列, a(3,3) と 1 次元配列, d(3)）を用意しよう.

練習問題 2

- ガウス･ジョルダンの消去法を用いて下の方程式の解を求めるプログラムを作りなさい.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 8 & 2 \\ 4 & 10 & 10 & 20 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 18 \\ 60 \\ 14 \end{pmatrix}$$

計算機で連立一次方程式を解く 三重対角行列の場合 (1)

- 次に, 三重対角行列の場合を考える.
- 具体的には下の方程式を考える.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 8 \\ 0 & 10 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 40 \end{pmatrix}$$

計算機で連立一次方程式を解く 三重対角行列の場合 (2)

- 方程式は下のような手順で変形すればよい.
  1. 1 行目を 2 $(= a_{1,1})$ で割る.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 8 \\ 0 & 10 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 40 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 8 \\ 0 & 10 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 16 \\ 40 \end{pmatrix}$$

  2. 1 行目に 2 $(= a_{2,1})$ をかけ, 2 行目から引く.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 10 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 40 \end{pmatrix}$$

計算機で連立一次方程式を解く
三重対角行列の場合 (3)

4. 2 行目を 2 $(= a_{2,2})$ で割る.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 40 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 40 \end{pmatrix}$$

5. 2 行目に 10 $(= a_{3,2})$ をかけ, 3 行目から引く.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 60 \end{pmatrix}$$

計算機で連立一次方程式を解く 三重対角行列の場合 (4)

6. 3 行目を -20 $(=a_{3,3})$ で割る.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 60 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

7. 3 行目に 4 $(=a_{2,3})$ をかけ, 2 行目から引く

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix}$$

計算機で連立一次方程式を解く 三重対角行列の場合 (5)

7. 2 行目に 2 $(= a_{1,2})$ をかけ, 1 行目から引く.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix}$$

計算機で連立一次方程式を解く 三重対角行列の場合 (6)

- 三重対角行列では,
  - 計算量が大幅に減る.（3×3の行列では大幅に減るように見えないかもしれないが.）
  - 下のように配列を使うことでメモリ使用量も減る.（3×3の行列では大幅に減るように見えないかもしれないが.）

$$\begin{pmatrix} b(1) & c(1) & 0 \\ a(2) & b(2) & c(2) \\ 0 & a(3) & b(3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d(1) \\ d(2) \\ d(3) \end{pmatrix}$$

練習問題

- 下の方程式を解く, 三重対角行列に特化したプロラムを作りなさい.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 8 \\ 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 40 \end{pmatrix}$$

  - 可能ならば, 任意の数の連立方程式を解くプログラムを作りなさい.

計算機で連立一次方程式を解く他の方法

- 連立一次方程式を解く方法には他にもある.
  - 直接法
    - ガウスの消去法
    - LU 分解法
    - …
  - 反復法
    - ヤコビ法
    - …

練習問題

- 下の方程式を解くプロラムを作りなさい.

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = \sin x \qquad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

境界条件は以下.

$$\frac{d\phi(0)}{dx} = 0$$
$$\phi(2\pi) = 0$$

  – 微分は差分で評価すると良い.