

itpass 実習数値計算編 2016年10月17日
2016年10月24日
2018年7月2日
2022年6月2日
2022年6月9日

計算機で非線形方程式 を解こう

目次

- 計算機で非線形方程式を解く

計算機で非線形方程式を解く はじめに (1)

- 下の方程式を計算機を使って解こう.

$$f(x) = 0$$

– 例えば,

$$x^2 - 2 = 0$$

- この手の方程式の数値解法は複数ある. ここでは下の二つの方法を考える.
 - 二分法
 - ニュートン法

計算機で非線形方程式を解く はじめに (2)

- 方程式を数値的に解くためには、「何らかの方法で」方程式を満たす x を見つければよい.
- 実際には, 下のよう解を見つける.
 - まずは解を仮定.
 - 何らかの仮定の下で真の解に近づける.

計算機で非線形方程式を解く はじめに (3)

- 右の内容の `nonlineq.f90` を作成して実行しよう。
 - このプログラムは, $f(x) = x^2 - 2$ の値を 0 から少しずつ大きくしながら計算する.
- 右のプログラムを変更して, $f(x)$ の値が最も小さくなる x ($f(x) = 0$ の近似解) を求めなさい.

```
program nonlineq
  implicit none
  real(8) :: Fx
  real(8) :: DelX
  real(8) :: X
  integer :: i
  DelX = 0.01d0
  do i = 1, 1000
    X = DelX * (i-1)
    Fx = X**2 - 2.0d0
    write( 6, * ) X, Fx
  end do
end program nonlineq
```

計算機で非線形方程式を解く

二分法 (1)

- もう少しまともな方法を考えよう.
- 方程式 $f(x) = 0$ の解は, 下の関係を満たす a と b ($a < b$) の間にある.

$$f(a) < 0 \text{ かつ } f(b) > 0$$

または

$$f(a) > 0 \text{ かつ } f(b) < 0$$

- この a と b の間隔を狭めることで精度のよい解が得られる.

計算機で非線形方程式を解く

二分法 (2)

- したがって, 下のようによく調べていくことで方程式の近似解を求めることができる.
 1. 少しずつ x の値を増やしながら, $f(x)$ の値を求め, $f(x)$ の符号が変わるところを探す.
 2. $f(x)$ の符号が変わる区間の midpoint での $f(x)$ の符号を調べ, 解が midpoint の左領域にあるか右領域にあるかを調べる.
 3. 解が含まれる領域について, その midpoint での $f(x)$ の符号を調べ, 解が midpoint の左領域にあるか...

この方法が二分法である.

練習問題

- 二分法を用いて下の方程式の解を求めるプログラムを作りなさい.

$$x^2 - 2 = 0$$

計算機で非線形方程式を解く ニュートン法 (1)

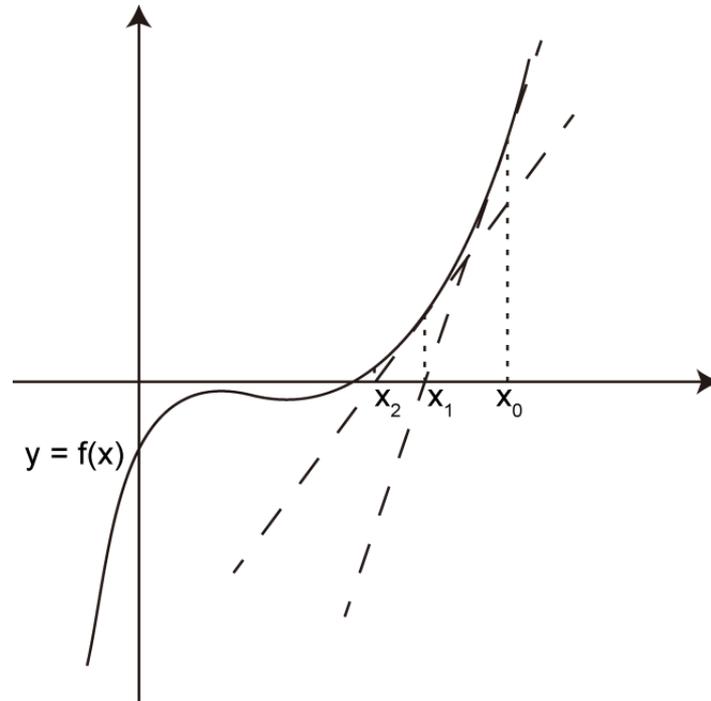
- より速く解に近づく方法を考えよう.
- 下の方程式を解こう.

$$f(x) = 0$$

- この方程式において $x = x_1$ と仮定すると, このとき, 一般には, $f(x_1)$ はゼロにならない.
- では, $f(x_1)$ がよりゼロに近くなる x をどのように推測すれば良いだろうか?

計算機で非線形方程式を解く ニュートン法 (2)

- 一つの方法は, $f(x)$ を局所的に線形近似して, 値がゼロとなる x を探すこと.



計算機で非線形方程式を解く

ニュートン法 (3)

- 一つの方法は, $f(x)$ を局所的に線形近似して, 値がゼロとなる x を探すこと.
 - $y = f(x)$ の $x = x_1$ における接線は下のよう表される.
$$y = f'(x)(x - x_1) + f(x_1)$$
 - そして, この近似式の値がゼロとなる x は下のよう与えられる.

$$x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_2$$

計算機で非線形方程式を解く ニュートン法 (4)

- このようにして求めた $x = x_2$ を用いて求めた $f(x_2)$ はやはり一般的にはゼロにはならない. しかし, $f(x_1)$ よりはゼロに近いと期待されるため, 繰り返すことでより良い近似解を求める.

この方法がニュートン法である.

練習問題

1. ニュートン法を用いて下の方程式の解を求めるプログラムを作りなさい.

$$x^2 - 2 = 0$$

練習問題

2. ニュートン法を用いて, 下の方程式の解を求めるプログラムを作りなさい.

$$\sigma T^4 = \frac{1}{4} (1 - A) F_s$$

$$A = \begin{cases} 0.7 & (T < 230 \text{ K}) \\ \text{線形で変化} & (230 \text{ K} \leq T \leq 263 \text{ K}) \\ 0.1 & (T > 263 \text{ K}) \end{cases}$$

練習問題

3. ニュートン法を用いて下の方程式の解を求めるプログラムを作りなさい.

$$\log_{10} p = 6.760956 - \frac{1284.07}{T - 4.718} + 1.256 \times 10^{-4} (T - 143.15)$$
$$p = 0.007$$

- なお, 一つ目の式は CO_2 の飽和蒸気圧曲線を表す.
 $p = 0.007$ (atm) はおよそ火星の表面圧力である.

注意

- ニュートン法は必ずしも収束しない.
- 例えば,

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 3$$

- を $x = 1$ を初期値としてニュートン法を適用すると, $x = 1, 2$ を交互に往復し, 収束しない.