気象力学を学ぶ上での基礎知識

河合　佑太

2010 年 1 月 23 日

目次

1　イントロダクション

日常生活の中で気象現象は, 誰にとっても関わりが深いと思う．僕自身も「天気の変化」に小さい頃から心を奪われて，大学では気象学を専攻している．毎日の天気の変化はごく身近にあるのに，ひとたびその大気の運動を定性的に議論しようと思うと深い数学や物理の知識が必要となってくる．また, 気象現象を記述する方程式は非線型偏微分方程式であり取り扱いがとても難しい．しかし，さまざまな技法を使って取り扱いにくい非線型性を取り除くことにより，重要な大気の運動の仕組みが見えてくる．その非線型性が大気の運動にとって重要なファクタとなる場合，定量的な議論を行うとなればコンピュータによる数値シュミレーションが必要となってくる．

いずれにしても，このような発展的かつ興味深い話題に触れるためには気象力学の基礎を固める必要があるように思われる．この「気象力学を学ぶ上での基礎知識」において，さまざまな気象現象の理解に必要となる「地球流体力学的な基礎中の基礎」をまとめたいと思う．また，気象力学の入門書のみではカバーし切れない知識の部分は連続体力学，流体力学の専門書等を通して，ノートの内容を充実させた．自分自身も勉強中なのでノートの体系性や構成が美しくない，あるいは問題があるかもしれないが，将来的により高度な知識（数値予報モデル，大循環モデルの詳細などについて）を学ぶ際の覚書かつ復習に有効活用できる資料になるように努力はしているつもりである．

このノートを作るにあたっての参考文献は最後にまとめている．極力すべて挙げているつもりではあるが完全でないことをお許し願いたい．

2　流体における運動法則と基本的な力

2.1　古典力学の運動法則と流体への適用

古典力学の運動方程式は質点の運動を記述するが，大気の運動を記述するために大気を構成する分子一つ一つを質点として運動を記述しようとはしない．大気のダイナミクスを考える際には，そのようなミクロな視点ではなく，連続体近似と呼ばれるもう少しマクロな視点で運動方程式を取り扱うことになる．古典力学と連続体力学の橋渡しについてこの節でまとめる．

2.1.1　ニュートン力学の第２法則

ニュートン力学の第 2 法則によれば, 絶対空間に固定した座標系（慣性座標系）に対して, ある質点の運動量が時間とともに変化する割合は，その質点に働く力の総和に等しい．このことを数式で表現した**運動方程式**(Equation of motion) は，質点に働く力の合ベクトルを $\boldsymbol{F}$，質点の質量を m，速度ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とすれば,

$$\boldsymbol{F} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \tag{2.1}$$

と書ける．

2.1.2　連続体への運動方程式の適用

ニュートンの運動方程式 (2.1) は質点の運動を記述する．なので質点として物体を構成する膨大な数の粒子を選び，それぞれの粒子に対して運動方程式を適用することが考えられる．しかし，そのようなことをしなくても剛体の場合は，その重心の運動（自由度 3 の並進運動）と重心周りの回転（各方向軸に対して自由度 3 の回転）に注目して，合計 6 個の自由度に関する方程式で剛体の運動を記述できる．しかし，液体や気体は剛体とは異なり外部的な力を加えられると変形してしまうためそのような方法は使えない．液体や気体のような流体に対して運動方程式を適用するためには，連続体という概念を取り入れる必要がある．

流体内部のある一点の（十分な量の分子を含む）微小体積について物理量の平均値が取れるとすると，その点における物理量はその点の連続関数として捉えることができる．このように，ミクロな分子の物性や運動を微小体積内の平均値で置き換えることによって得られる連続的な物理的性質を持つ仮想的な物体は，**連続体**（continuum）と呼ばれる．また，このような近似は**連続体近似**と呼ばれる．流体力学では，流体を連続体として取り扱う．

このような連続体では，密度 ρ は以下のように定義される．流体が質量 m を持った粒子（原子や分子）で構成されていする。流体中の点 P を含む微小体積 δv をとり，そこに含まれる粒子の個数を N 個，点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$，点 P における密度を $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ とすると,

$$\rho(\boldsymbol{r}, t) \equiv \frac{Nm}{\delta v}$$

である．

微小体積内に含まれる分子が少なすぎる場合，分子の衝突が少ないため気体の物理的な性質がうまく平均化されない．このような場合には連続体近似は成り立たなくなる．

2.2　流体にはたらく基本的な力

流体にはたらく力には，**体積力**（body force）と**面積力**（surface force）がある．前者はその大きさが質量や体積に比例する力であり，重力や慣性力などが当てはまる．一方，後者は面の両側の流体がその面を通じて及ぼしあう力であり面積に比例する．その単位面積当たりの力は応力と呼ばれ，流体においては圧力や摩擦力などが面積力である．この章では，大気にはたらく基本的な力として万有引力，圧力傾度力を紹介する．摩擦力については，次節で応力を導入した後に触れることにする．

2.2.1　万有引力

図 1.1 のように 2 つの物体があるとき，その間には物体の質量に比例し，2 物体間の距離の 2 乗に反比例する引力が働く．この力を**万有引力**(universal gravitation) という．

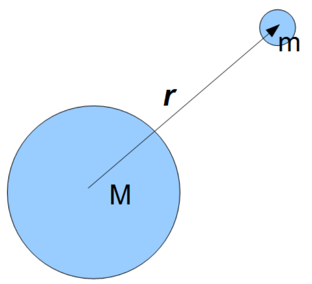

図 2.1　球形をした 2 物体の間に働く引力

2 つの物体の質量をそれぞれ M, m とし 2 つの物体の位置ベクトルの相対ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とする (図参照)．このとき質量 m に及ぼす質量 M の引力 $\boldsymbol{F}_g$ は,

$$\boldsymbol{F}_g = -\frac{GMm}{r^2}(\frac{\boldsymbol{r}}{r}) \tag{2.2}$$

となる。ただし $r = |\boldsymbol{r}|$ であり，G は万有引力定数 ($= 6.673 \times 10^{-23}$ [kg^{-1}m^{3}s^{-2}]) である．

式 (2.2) は，一般的には容積が無限小であるような仮想的なもの（質点）に対して適用されるべきであるが，球対称な質量分布を持つような物体に対しては，その 2 物体の中心間の距離を r として適用することができる．したがって，地球の質量を M，大気あるいは海洋の微小部分の質量を m とすれば，単位質量あたりの微小部分におよぼす地球の引力は,

$$\frac{\boldsymbol{F}_g}{m} \equiv g^* = \frac{GM}{r^2}(\frac{\boldsymbol{r}}{r}) \tag{2.3}$$

である．平均海面から測った高さを z，地球の平均半径を a（$= 6371$ [km]）とすると，$r = a + z$ であるので,

$$\boldsymbol{g}^* = \frac{\boldsymbol{g}_0^*}{(1 + \frac{z}{a})^2}$$

である．ここで,

$$\boldsymbol{g}_0^* = -\frac{GM}{a^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

は平均海面における引力である．気象学では $z \ll a$ であるので，$\boldsymbol{g}^* = \boldsymbol{g}_0^*$ となり，地球の引力は高さによらず一定として取り扱えるものとする．

2.2.2　気圧傾度力

体系の順番としては次に応力を導入するのが筋かもしれないが，やや難しいテンソルの表記に触れる前に気圧傾度力の物理的なイメージを捕らえておくことにする．気圧傾度力を考えるにあたって，図 2.2 のような (x_0, y_0, z_0) を中心とする微小体積（$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$）の空気塊を考える．周囲の空気は体積要素の壁に運動量を連続的に分け与える．この単位面積，単位時間あたりの運動量の輸送が，周囲の空気によって体積要素の壁に及ぼされる圧力にすぎない．体積要素の中心における圧力を p_0 とすると，図 1.2 の壁 A の圧力はテイラー展開を用いて，

$$p_0 + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} + (\text{高次の項})$$

と表される．高次の項を無視すれば，壁 A において体積要素にはたらく気圧力は，

$$F_{Ax} = -(p_0 + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\Delta x}{2})\Delta y \Delta z$$

である．ここで，$\Delta y \Delta z$ は壁 A の面積である．同様にすれば，壁 B において体積要素にはたらく気圧力は

$$F_{Bx} = +(p_0 - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\Delta x}{2})\Delta y \Delta z$$

となる．よって，体積要素にはたらく正味の気圧力の x 成分は，

$$F_x = F_{Ax} + F_{Bx} = -\frac{\partial p}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z$$

である．正味の圧力はその力の方向の圧力微分に比例するので，この力は**気圧傾度力**（pressure gradient force) と呼ばれる．微小体積の質量 m は密度 ρ とその体積の積であるので, $m = \rho \delta x \delta y \delta z$ である．よって，単位質量あたりの圧力傾度力の x 成分は，

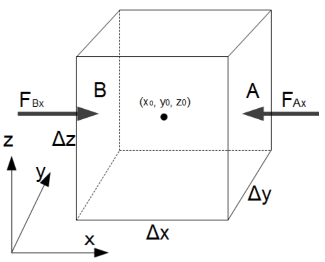

図 2.2　流体要素にはたらく気圧傾度力の x 方向成分

$$\frac{F_x}{m} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

となる．同様にすれば，単位質量あたりの圧力傾度力の y, z 成分はそれぞれ，

$$\frac{F_y}{m} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{F_z}{m} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

となるので，単位質量あたりの全方向の圧力傾度力はベクトル表記を使えば，

$$\frac{\boldsymbol{F}}{m} = -\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{2.4}$$

と表される．圧力傾度力は，圧力自身でなく圧力場の勾配に比例するという点に注意されたい．

2.3 応力と応力テンソル

気象力学の入門書では，流体にはたらく基本的な力として気圧傾度力と摩擦力を，流体から取り出した微小体積の各面にはたらく力を考えてそれぞれ導入している（応力テンソルによる根本的な導入を避けて，入り口の門戸を下げているように感じる）．このように二つの力を別々に考えないでも，2 階テンソルの応力を導入することで，より一般的な形で気圧傾度力や摩擦力を導入できる．ここでは，流体にはたらく力として応力をまとめることにして，運動方程式の中で気圧傾度力や摩擦力が応力の形でどのように現れるかについては次節で紹介する．

2.3.1 応力と応力テンソル

まず応力について考える．一般に応力はそれが作用する面の向きに依存する．図 2.3 のように時刻 t において，流体中の点 $\boldsymbol{r}$ で単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ と面積 δS を持つ面を考える．この面を通じて面の表側（$\boldsymbol{n}$ が向いている側を表とする）の流体が裏側の流体に及ぼす力を，

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}, t)\delta S \tag{2.5}$$

と書き，単位面積当たりの力 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}, t)$ を時刻 t，点 $\boldsymbol{r}$ においてその面に作用する**応力**（stress）という．$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}, t)$ の $\boldsymbol{n}$ 方向成分は**法線応力**（normal stress），接平面に平行な成分は**接線応力**（tangential stress）と呼ばれる．また面の裏側の流体が表側の流体に及ぼす応力は，$\boldsymbol{T}(-\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}, t)$ と表される．したがって，作用反作用の法則より，

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}, t) = -\boldsymbol{T}(-\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}, t) \tag{2.6}$$

が成り立つ．ゆえに，法線応力が正ならばその面を通じて流体は引っ張り合い，負ならば押し合っていることになる．以後，$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}, t)$ の $\boldsymbol{r}$，t を省略する．次に，図 2.4 の微小な四面体にはたらく力のつり合いを考える．この四面体にはたらく力は，慣性力，外力，4 つの面を通じて作用する面積力である．慣性力と外力は体積力であり，四面体の長さのスケールを δl とすると，$O((\delta l)^3)$ である．これに対して面積力は $O((\delta l)^2)$ であるから，$\delta l \to 0$ のときには体積力の寄与が無視できて，四面体の 4 つの面に作用する面積力のつり合いの式として，

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n})\delta S + \sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{T}(-\boldsymbol{e}_j)\delta S_j = 0 \tag{2.7}$$

を得る．ここで，δS は $\triangle P_1P_2P_3$ の面積，δS_j は x_j 軸に垂直な面の面積である．また，$\boldsymbol{e}_j$ は x_j 軸方向の単位ベクトルである．ベクトル $\boldsymbol{T}$ の x_i 成分を T_i と表す．すなわち，

$$\boldsymbol{T} = (T_1, T_2, T_3)$$

と書け，

$$\boldsymbol{T} = T_1\boldsymbol{e}_1 + T_2\boldsymbol{e}_2 + T_3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{j=1}^{3} T_j\boldsymbol{e}_j \tag{2.8}$$

ということである．さらに，(2.8) にアインシュタインの縮約記法を用いれば，

$$\boldsymbol{T} = T_j\boldsymbol{e}_j \tag{2.9}$$

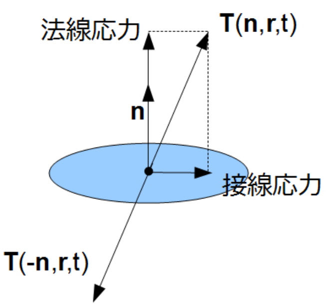

図 2.3　面の向きと応力

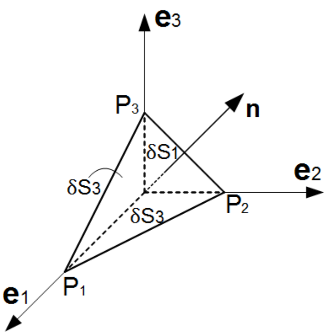

図 2.4　座標軸に垂直な 3 つの面を持つ微小な四面体

と表される．同様の記法を（2.7）に使えば，次のように書ける．

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n})\delta S + \boldsymbol{T}(-\boldsymbol{e}_j)\delta S_j = 0 \tag{2.10}$$

$\delta S_j = (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_j)\delta S$ であることと，及び（2.6）を用いれば，（2.7）より，

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_j) \tag{2.11}$$

を得る．したがって，３つの座標軸に垂直な面に作用する応力 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_1)$，$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_2)$，$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_3)$ がわかれば任意の面に作用する応力 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n})$ を知ることができる．

$$\tau_{ij} = T_i(\boldsymbol{e}_j) \tag{2.12}$$

と定義すれば，$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_j = n_j$ なので，（2.11）は，

$$T_i(\boldsymbol{n}) = \tau_{ij}n_j \tag{2.13}$$

と書ける．この 9 個の量 τ_{ij} を成分とする量を**応力テンソル**（stress tensor）という．応力テンソルの特徴は以下のようになる．

- テンソルの定義により τ_{ij} は，x_j 軸に垂直な面の x_j の大きい方の側が小さい方の側に作用する単位面積当たりの力 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_j)$ の x_i 軸方向の成分である．
- τ_{11}，τ_{22}，τ_{33} が法線応力，$\tau_{ij}(i \neq j)$ が接線応力である．
- 応力テンソルは，$\boldsymbol{n}$ に無関係であり，$\boldsymbol{r}$ と t のみによって決まる．そして，２階テンソル τ_{ij} がベクトル $\boldsymbol{n}$ をベクトル $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n})$ に対応させる線形作用素の役割をしている．
- 応力テンソルは対称テンソルである．(付録 A1,A2 参照)

いま，ある法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を持つ面に作用する応力が，

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}) = \lambda\boldsymbol{n} \tag{2.14}$$

を満たすとする．このとき，その面には大きさ $|\lambda|$ の法線応力しか作用しない．（2.12）を用いれば，（2.14）は，

$$\tau_{ij} n_j = \lambda \delta_{ij} n_j \tag{2.15}$$

となる．ここで δ_{ij} はクロネッカーのデルタ（Kronecker delta）であり，$i = j$ のとき 0 で $i \neq j$ のとき 1 である．（2.15）は対称行列 τ_{ij} の固有値問題であり，対称行列の性質から重複度も数えれば 3 個の実固有値 τ'_1，τ'_2，τ'_3 が存在する．また，その互いに異なる固有値に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{e}'_1$，$\boldsymbol{e}'_2$，$\boldsymbol{e}'_3$ は 3 次元ベクトル空間の直交基底となる．よって，これらの固有ベクトルを新しい直角座標系 x'_1，x'_2，x'_3 の基底に選べば，座標軸に垂直な面にはそれぞれ法線応力 τ'_1，τ'_2，τ'_3 のみが作用するので，新しい系での応力テンソルの表示行列は，

$$\mathrm{diag}(\tau'_1, \tau'_2, \tau'_3) \tag{2.16}$$

となる．ここで，$\mathrm{diag}(a, b, c)$ は a, b, c を対角成分とする対角行列を意味する．この τ'_1，τ'_2，τ'_3 を**主応力**（principal stress）といい，また対応する新しい座標軸を**応力テンソルの主軸**（principal axes of stress tensor）という．

固有値はスカラー量なので回転に対しても不変である．よって，固有多項式も回転に対して不変であるはずであり，固有方程式の 2 次の項の係数に対応する行列 τ_{ij} のトレースも直角座標系の回転に対して不変である．すなわち，

$$\tau_{ii} \equiv \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} = \tau'_1 + \tau'_2 + \tau'_3 \tag{2.17}$$

が成り立つ．また，主軸系においては，法線 $(n'_1,\, n'_2,\, n'_3)$ を持つ面要素を通して作用する応力は，

$$(\tau'_1 n'_1,\, \tau'_2 n'_2,\, \tau'_3 n'_3) \tag{2.18}$$

となる．

2.3.2 静止流体における応力テンソル

さて，上で定義した応力を用いて流体の特徴づける．流体は固体に比べて容易に変形するのが特徴である．しかし，圧縮には抵抗する．そこで流体を，体積変化なしに変形させようとするといかなる作用にも抵抗できないものとして定義する．主軸系で表した応力テンソル（2.16）を平均垂直応力

$$\tau_m = \frac{1}{3}\tau_{ii}$$

を使って次のよう 2 つに分割することを考える．

$$\mathrm{diag}(\frac{1}{3}\tau_{ii},\, \frac{1}{3}\tau_{ii},\, \frac{1}{3}\tau_{ii}) \tag{2.19}$$

および

$$\mathrm{diag}(\tau'_1 - \frac{1}{3}\tau_{ii},\, \tau'_2 - \frac{1}{3}\tau_{ii},\, \tau'_3 - \frac{1}{3}\tau_{ii}) \tag{2.20}$$

平均垂直応力（2.19）は，どのような向きの面に対しても同じ大きさの法線応力のみがはたらく．（2.19）のようなテンソルは等方テンソルという. この等方的な応力テンソルは，図 2.5 のような状態が対応する. このような圧縮には流体は抵抗し，静止状態を維持することができる.

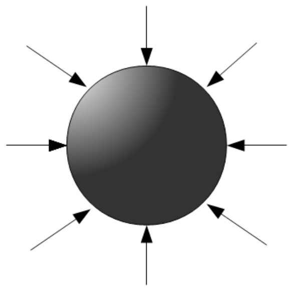

図 2.5　等方的圧縮

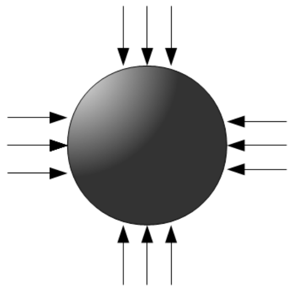

図 2.6　体積変化なしに変形しようとする応力状態

一方，(2.20) は等方的な応力テンソルからのずれ（偏差テンソル）であり，そのトレースは (2.17) から 0 となることが分かる. したがって，対角成分の少なくとも 1 つは正，1 つは負であって，図 2.6 のような体積変化なしに純粋に流体要素を変形しようとする応力状態である. 流体はこれに抵抗できない. 体積力は高次の無限小なので，体積力でこの変形に対抗することもできない. したがって，このような応力状態が存在すると流体は静止状態を保つことができない. 故に，流体が静止しているときには，

$$\tau_1' = \tau_2' = \tau_3' = \frac{1}{3}\tau_{ii} \tag{2.21}$$

を満たさなければならない. 結局，静止流体に対しては応力テンソルは，

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} \tag{2.22}$$

と書ける.$p(= -\tau_{ii}/3)$ は $\boldsymbol{r}$ のみの関数であり，**圧力**（pressure）と呼ばれる. (2.22) のように右辺に負号をつけるのは，圧力状態で p が正になるようにするためである. (2.22) は，法線 $\boldsymbol{n}$ を持つ面要素を通じて作用する単位面積当たりの力が $-p\boldsymbol{n}$ であることを意味する. また，この静止流体の圧力 p は，熱力学的な圧力 p_e そのものである.

いま，静止状態，運動状態にかかわらず，接線応力が常に 0 であると仮定する. このとき法線応力は面の選び方によらず一定である. つまり，この場合にも応力テンソルは (2.22) の形となる. なぜなら，(2.18) が任意の法線ベクトル $\boldsymbol{n}'$ に対して，$\boldsymbol{n}'$ と平行であるためには (2.21) が成立しなければならないからである.

運動状態にある流体は，一般に粘性（内部摩擦力）によって接線応力を生じる. このように粘性によって接線応力を生じるような流体を**粘性流体**（viscous fluid）という. 一方，運動状態でも接線応力を生じない仮想的な流体を考え，これを**非粘性流体**（inviscid fluid）または**完全流体**（perfect fluid）と呼ぶ. 完全流体では運動中でも応力テンソルは静止状態と同じ (2.22) の形となる. つま

り，完全流体の場合も応力として等方的な圧力のみがはたらく. しかし，一般に流体が運動しているときの圧力 p の値は静止しているときの値とは異なる. ふつう，完全流体では局所熱平衡が成り立つと仮定するので，(2.22) の圧力 $p(\boldsymbol{r}, t)$ は局所的な熱力学的圧力 $p_e(\boldsymbol{r}, t)$ に等しい.

流体の粘性を無視して完全流体のような仮想的な流体を考えるのは，それにより数学的な取り扱いが粘性流体に比べてはるかにシンプルになるからである. さらに，完全流体が現実の流体のふるまいをよい近似で与える場合がしばしばあるからである.

2.4 運動している流体と応力テンソル

流体が運動するときに流体要素は単に並進するだけでなく，回転したり変形したりする. この流体の局所的な変形は，前の小節で紹介した応力と密接に関連している. ここでは，運動する流体における応力テンソルがどのような形式となるかを調べる.

2.4.1 流体の局所的運動と変形

ある流体要素の中心 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$，その流体要素の他の任意の点 Q の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} + \delta\boldsymbol{r}$ とする. このとき，相対速度 $\delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r} + \delta\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ を調べることによって，変形の様子を知ることができる.$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r} + \delta\boldsymbol{r})$ を $\boldsymbol{r}$ まわりでテイラー展開して，微少量 $|\delta\boldsymbol{r}|$ の 2 次以上の項を無視すると，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r} + \delta\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) &+ \frac{\partial u}{\partial x}\delta x\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial z}\delta z\boldsymbol{i} \\ &+ \frac{\partial v}{\partial x}\delta x\boldsymbol{j} + \frac{\partial v}{\partial y}\delta y\boldsymbol{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\delta z\boldsymbol{j} \\ &+ \frac{\partial w}{\partial x}\delta x\boldsymbol{k} + \frac{\partial w}{\partial y}\delta y\boldsymbol{k} + \frac{\partial w}{\partial z}\delta z\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{2.23}$$

となる. $\partial u/\partial x$ 等の微分係数は点 P における値である. 第 1 項の $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ は，その流体要素の全体としての剛体的な並進運動を表す. 残り 9 項の合成が点 Q の点 P に対する相対運動を表す.$(\partial u/\partial x)\delta x\boldsymbol{i}$ で表される運動は，x 軸方向を向き，yz 面からの距離 δx に比例するようなもの，すなわち，$\partial u/\partial x$ が正（負）ならば，x 方向に一様な伸び（縮み）を表す（図 2.7）. 同様に，$(\partial v/\partial y)\delta y\boldsymbol{j}$ および $(\partial w/\partial z)\delta z\boldsymbol{k}$ はそれぞれ y 方向，z 方向の一様な伸びあるいは縮みを表している.

一方，$(\partial u/\partial y)\delta y\boldsymbol{i}$ は x 方向の運動であるが，その速度の大きさは δy に比例する. これは図 2.8 のような xz 平面に平行な平面の x 方向のずれ運動あるいはせん断運動を表す. 残りの他の項についても同様である.

相対速度をテンソル表記で書けば，

$$\delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\delta x_j \tag{2.24}$$

となる. 行列 $\partial u_i/\partial x_j$ は 2 階テンソルであって，**速度勾配テンソル**（velocity gradient tensor）と呼ばれる. ここで，速度勾配テンソルを対称テンソルと反対称テンソルに分解することを考える. すなわち，

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),\ \Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

とすると，

$$\delta u_i = e_{ij}\delta x_j + \Omega_{ij}\delta x_j \tag{2.25}$$

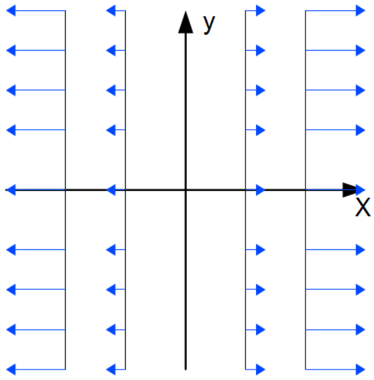

図 2.7　x 方向の一様な伸び $(\partial u/\partial x > 0)$

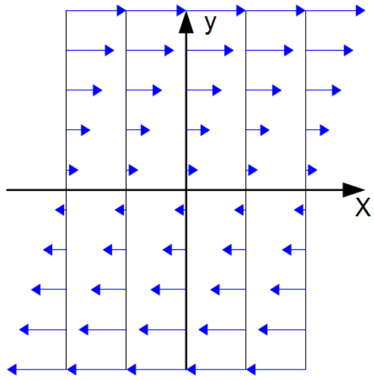

図 2.8　x 方向のずれ運動 $(\partial u/\partial y > 0)$

となる．これにより，相対速度への寄与を対称テンソルによるものと反対称テンソルによるものとに分割することができる．

反対称テンソル Ω_{ij} については，速度場 $\boldsymbol{u}$ の**回転**（rotation）として知られているベクトル場 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{u}$ の成分 (ξ, η, ζ) を用いることによって

$$(\Omega_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -\zeta & \eta \\ \zeta & 0 & -\xi \\ -\eta & \xi & 0 \end{pmatrix}$$

と表される．ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ は**渦度**（vorticity）と呼ばれる．

$\boldsymbol{e}_i$ を（2.25）にかけて i について加えれば，

$$\delta \boldsymbol{u} = \delta u_i \boldsymbol{e}_i = e_{ij} \delta x_j \boldsymbol{e}_i + \Omega_{ij} \delta x_j \boldsymbol{e}_i$$

となるが，ここで

$$\begin{aligned} \Omega_{ij}\delta x_j \boldsymbol{e}_i &= (\Omega_{12}\delta x_2 + \Omega_{13}\delta x_3)\boldsymbol{e}_1 + (\Omega_{21}\delta x_1 + \Omega_{23}\delta x_3)\boldsymbol{e}_2 + (\Omega_{31}\delta x_1 + \Omega_{32}\delta x_2)\boldsymbol{e}_3 \\ &= \frac{1}{2}(\eta\delta z - \zeta\delta y)\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}(\zeta\delta x - \xi\delta z)\boldsymbol{j} + \frac{1}{2}(\xi\delta y - \eta\delta x)\boldsymbol{k} \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \times \delta\boldsymbol{r} \end{aligned}$$

なので，

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{u} = & e_{11}\delta x \boldsymbol{i} + e_{22}\delta y \boldsymbol{j} + e_{33}\delta z \boldsymbol{k} \\ & + e_{23}(\delta y \boldsymbol{k} + \delta z \boldsymbol{j}) + e_{31}(\delta z \boldsymbol{i} + \delta x \boldsymbol{k}) + e_{12}(\delta x \boldsymbol{j} + \delta y \boldsymbol{i}) \\ & + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \times \delta \boldsymbol{r} \end{aligned} \tag{2.26}$$

を得る．（2.26）の 1 行目は，座標軸方向の一様な伸び（あるいは縮み）に対応する.2 行目の $e_{12}(\delta x \boldsymbol{j} + \delta y \boldsymbol{i})$ は，図 2.7 のような x 軸と y 軸のなす角が単位時間当たり $2e_{12}$ だけ減少する，正

方形がひし形にひしゃげるような純粋なずれ運動に対応する.2 行目の残りの項も同様である. 一方，3 行目は**角速度**（angular velocity）$\boldsymbol{\omega}/2$ の**剛体的回転**（rigid body rotation）による速度場を表している.

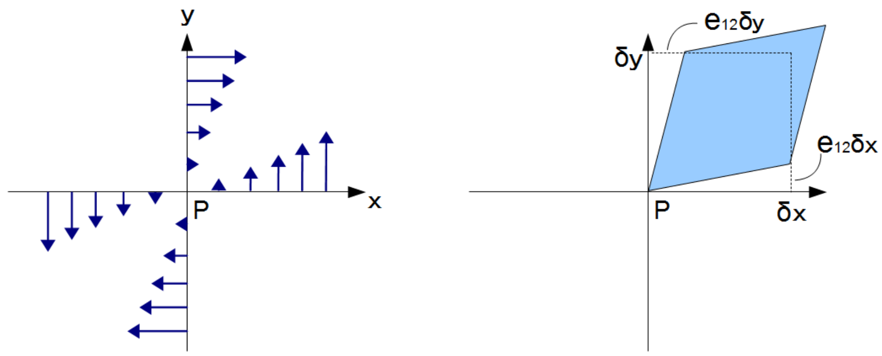

図 2.9　$e_{12}(\delta x\boldsymbol{j}+\delta y\boldsymbol{i})$ に対応する純粋な変形運動

このように e_{ij} は流体要素の変形の速度（割合）を表すので，**変形速度テンソル**あるいは**ひずみ率テンソル**（rate-of-strain tensor）と呼ばれる. このテンソルは対称テンソルであるので，座標軸を主軸座標系に変換すれば,

$$\mathrm{diag}(e'_1,\, e'_2,\, e'_3) \tag{2.27}$$

の形に帰着できる. つまり，流体要素の変形は対称テンソルの主軸方向の一様な伸びまたは縮みのみによって表されることになる. また，対角成分の和

$$e'_1+e'_2+e'_3=e_{ii}=\nabla\cdot\boldsymbol{u} \tag{2.28}$$

は，後に述べるが流体要素の体積膨張率である. 応力テンソルのときと同様に（2.27）を等方テンソルとそのずれに分解すると,

$$\mathrm{diag}(\frac{1}{3}e_{ii},\, \frac{1}{3}e_{ii},\, \frac{1}{3}e_{ii}) \quad ,\ \mathrm{diag}(e'_1-\frac{1}{3}e_{ii},\, e'_2-\frac{1}{3}e_{ii},\, e'_3-\frac{1}{3}e_{ii})$$

となる. 前者は等方的な（2.28）に対応する膨張あるいは収縮であり，後者は体積変化を伴わない球を楕円体にひしゃげるような純粋な変形運動に対応する.

以上より微小な流体要素の運動は，次のような運動を同時に行っているといえる.

1. 中心における流速 $\boldsymbol{u}$ での全体としての剛体的並進運動.
2. 角速度 $\boldsymbol{\omega}/2$ の剛体的回転（自転）
3. 球を楕円体にひしゃげるような体積変化を伴わない純粋な変形運動

4. $\nabla \cdot \boldsymbol{u}$ の割合での等方的な膨張（あるいは収縮）運動

（2）は反対称テンソル Ω_{ij} からくる. 一方，変形運動（3），（4）は対称テンソル e_{ij} からくる. また,（1），（2）は剛体的運動であり，（3），（4）は変形体特有の運動である. 密度一定の完全流体おける渦なし流れ ($\boldsymbol{\omega} = 0$ の流れ) では，$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$ なので，流体要素は並進しながら純粋な変形運動（3）のみを行うことになる.

2.4.2　変形速度と応力の関係

静止流体においては前述したように，応力は法線成分しか持たず，法線応力の大きさはそれが作用する向きによらない．つまり，応力テンソルは,

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} \tag{2.29}$$

と表されることを示した．また，接線応力が表れないと仮定すれば（完全流体），運動している流体の場合でも，応力テンソルは（2.29）のように表されるのであった．しかし，実際の（相対）運動をしている流体では粘性のために接線応力が現れる．また，一般に面の向きによって接線応力の大きさが異なる．したがって，運動している流体の圧力をあらためて定義する必要がある．ここで，運動している流体の圧力を平均の法線応力に負号をつけた

$$p = -\frac{1}{3}\tau_{ii} \tag{2.30}$$

によって定義する．静止流体や完全流体の場合の圧力も上の関係を満たしているので，（2.30）の定義はそれらの拡張となっている．また，τ_{ii} は座標系の回転に対して不変であり，（2.30）の定義はこの点でも好都合である．（2.30）は純粋に力学的な圧力の定義である．

このとき，応力テンソルを等方的な圧力とそれからのずれの 2 つに分けると便利である．

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + d_{ij} \tag{2.31}$$

d_{ij} は応力テンソルの非等方的な部分で，接線応力もたらすと同時に対角成分は 0 である．d_{ij} は**偏差応力テンソル**（deviatoric stress tensor）と呼ばれ，もっぱら流体が相対運動をしていることによって生じる．

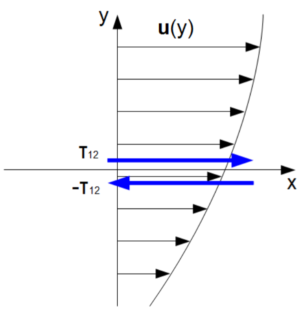

図 2.10　剪断流

空気や水のような通常の流体では，図 2.10 のような剪断流に対して，粘性のために y 軸に垂直な面を通じて y の大きい側が小さい側に

$$\tau_{12} = d_{12} = \mu\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.32}$$

だけの接線応力を及ぼす．このとき，同時に小さい側は大きい側に同じ大きさの逆向きの接線応力を及ぼす．この応力は速度差を減らす方向にはたらく．このように速度勾配に比例する接線応力を生ずるような流体を**ニュートン流体**（Newtonian fluid）と呼ぶ．大気の運動を記述する際には，この「速度勾配に比例する接線応力（＝ニュートン

流体)」を仮定する．一方，接線応力と速度勾配が比例しない流体を**非ニュートン流体**と呼ぶ．このニュートン流体の関係は，偏差応力テンソルと速度勾配テンソルが比例関係にあることを示している．流体要素全体が並進運動あるいは剛体運動している場合は相対運動を生じないので，そういった運動は粘性力に関係しない．したがって，速度勾配テンソルの中で変形速度テンソルのみが偏差応力テンソルに関係していると考えられる．そこで，$d_{ij} = f(e_{ij})$ という関係があるとする．さらに，e_{ij} が十分小さいとしてテイラー展開を行い，2 次以上の項を無視すれば，

$$d_{ij} = a_{ijkl}e_{kl} \tag{2.33}$$

と書ける．ここで，

$$a_{ijkl} = (\frac{\partial d_{ij}}{\partial e_{kl}})_{e_{kl}=0} \tag{2.34}$$

であり，これらは e_{ij} によらない物質定数である．d_{ij} と e_{ij} は 2 階テンソルであるので，a_{ijkl} は 4 階テンソルである．さらに，流体が等方的な物質であれば，これらは等方的なテンソルでなければならない．一般に，4 階の等方テンソルは 3 つの自由度をもって次のように書けることが知られている．ただし，B, C, D はスカラーである．

$$a_{ijkl} = B\delta_{ij}\delta_{kl} + C\delta_{ik}\delta_{jl} + D\delta_{il}\delta_{jk}$$

これを（2.33）に代入すれば，

$$\begin{aligned} d_{ij} = a_{ijkl}e_{kl} &= B\delta_{ij}\delta_{kl}e_{kl} + C\delta_{ik}\delta_{jl}e_{kl} + D\delta_{il}\delta_{jk}e_{kl} \\ &= B\delta_{ij}e_{ll} + Ce_{ij} + De_{ji} \\ &= B\Theta\delta ij + (C + D)e_{ij} \end{aligned}$$

ただし，

$$\Theta = e_{ll} = \frac{\partial u_l}{\partial x_l} = \nabla \cdot \boldsymbol{u}$$

とおき，また変形速度テンソルが対称テンソルである（$e_{ij} = e_{ji}$）であることを用いた．さらに，$B = \lambda$，$C + D = \mu$ とおけば，

$$d_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda\Theta\delta_{ij}$$

を得る．さらに，偏差応力テンソルの対角成分の和は 0 となるので，

$$d_{ii} = 2\mu e_{ii} + \lambda\Theta\delta_{ii} = (2\mu + 3\lambda)\Theta = 0$$

であり，これより

$$2\mu + 3\lambda = 0$$

でなければならない．したがって，偏差応力テンソルは

$$d_{ij} = 2\mu(e_{ij} - \frac{1}{3}\Theta\delta_{ij}) \tag{2.35}$$

と表される．$\mu(> 0)$ は粘性に関係する物質定数で，**粘性率**，**粘性係数**（coefficient of viscosity）と呼ばれる．右辺の $e_{ij} - (1/3)\Theta\delta_{ij}$ も対角和が 0 を満たしていることに注意が必要である．なお，

（2.35）の形は（2.32）とも一致している．また，粘性率を物質の密度で割った値（$\nu = \mu/\rho$）は**動粘性率**（kinematic viscosity）と呼ばれる．

以上をまとめれば，ニュートン流体における応力テンソルは

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu(e_{ij} - \frac{1}{3}\Theta\delta ij) \tag{2.36}$$

となる．ただし，p は（2.30）により定義される．特に非圧縮な流れ（$\Theta = \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$）では，

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) \tag{2.37}$$

である．

3　流体を記述するための支配方程式

前節では，流体にはどのような力がはたらくかを紹介した．この節では，流体の運動を記述する方程式を紹介する．また，流体を記述する変数の個数と同じだけの方程式（連続の式（質量保存則），状態方程式，エネルギー方程式）を導くことで方程式系を閉じることを考える．

3.1　流体運動の記述法

流体の運動を記述するには，以下に紹介する**ラグランジュ的記述**（Lagrangian specification）と**オイラー的記述**（Eulerian specification）の 2 つの方法が使われる．前者と後者で時間微分の意味が異なってくる．また，2 つの記述法における微分を結びつける関係式が存在する．

3.1.1　ラグランジュ的記述

ラグランジュ的記述では，流体運動にともなって連続体としての流体を構成する粒子が時間的にどのように動くかに注目する．つまり，注目する微小な体積（control volume）は，目印をつけた無限小の流体粒子の塊を指すことになる．流体粒子の運動とともに注目する微小体積も移動するため，同じ微小体積内は常に同じ流体粒子を含む．目印は，各流体粒子の初期時刻 $t = 0$ での位置ベクトル $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ をとることが多い．ここで，時刻 t での流体粒子の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ とすれば，

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}_0, t) \tag{3.1}$$

と表される．ただし，$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}_0, 0)$ である．

この記述において，流体粒子の初期位置 $\boldsymbol{r}_0$ と時間 t が独立変数であり，粒子の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ などが従属変数である．例えば，初期に $\boldsymbol{r}_0$ にいた流体粒子に注目してその位置ベクトルの時間変化率を求めれば，その粒子の速度 $\boldsymbol{u}$ を求めたことになる．つまり，

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}_0, t) = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}$$

と書ける．ラグランジュ的記述は，特定の流体要素を使って最も簡単に記述される保存則を導く際に便利である．

3.1.2　オイラー的記述

オイラー的記述では，空間座標 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ と時刻 t が独立変数で，従属変数は速度や密度などであり，

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t)$$

などと表される．オイラー的記述では座標軸と相対的に固定された点で物理量の変化を見ることになり，物理量の”場（field）”に注目している．

オイラー的記述においても 1 つの流体粒子に注目するとき，それに付随する物理量が時間的にどのように変化するのかを調べたいときがある．このように流体粒子に注目した時間的変化を表す時間微分を**ラグランジュ微分**（Lagrangian derivative）や**物質微分**（material derivative）と呼ぶ．この時間微分を D/Dt で表し，座標軸に相対的に固定された点における局所的な時間変化 $\partial/\partial t$ と

区別する．後者の時間微分は，**オイラー微分**（Eulerian derivative）と呼ばれる．なお，D/Dt はラグランジュ的記述における $\partial/\partial t$ に対応する．

3.1.3 ラグランジュ微分とオイラー微分の関係

考えている物理量を F とする．これは，オイラー的記述では $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ と時間 t の関数となる．いま注目する流体粒子が時刻 t において位置 $\boldsymbol{r}$ にいたとし，微小時間 δt 後の時刻 $t+\delta t$ にはその流体粒子は位置 $\boldsymbol{r}+\boldsymbol{u}\delta t=(x+u\delta t, y+v\delta t, z+w\delta t)$ にきているとする．したがって，その間の F の増分 δF は,

$$\begin{aligned}\delta F &= F(x+u\delta t, y+v\delta t, z+w\delta t, t+\delta t)-F(x,y,z,t)\\ &= \frac{\partial F}{\partial t}\delta t+\frac{\partial F}{\partial x}u\delta t+\frac{\partial F}{\partial y}v\delta t+\frac{\partial F}{\partial z}w\delta t+\boldsymbol{O}((\delta t)^2)\end{aligned}$$

である．よって，特定の流体粒子に注目したときの F の時間変化の割合は,

$$\frac{DF}{Dt}=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta F}{\delta t}=\frac{\partial F}{\partial t}+u\frac{\partial F}{\partial x}+v\frac{\partial F}{\partial y}+w\frac{\partial F}{\partial z}$$

となる．また，物理量 F は任意なので微分演算子として表せば,

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial t}+u_j\frac{\partial}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla \tag{3.2}$$

となる．

ここで，流体粒子の加速度 $\boldsymbol{a}$ は速度 $\boldsymbol{u}$ のラグランジュ微分として得られるので,

$$\boldsymbol{a}=\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt}=\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} \tag{3.3}$$

である．$\boldsymbol{u}$ が時間によらない（$\partial\boldsymbol{u}/\partial t=0$）とき，流れは**定常**（steady）といわれる．(3.3）から流れが定常であっても，流体粒子が流れていく方向に速度場が変化していれば加速度はゼロでないことに注意が必要である．

3.2 質量保存則

この小節では，質量保存則から流れの場を支配する方程式の 1 つである連続の式を導出する．

3.2.1 連続の式の導出

ここで，図 3.1 のような空間に固定した閉じた曲面 S を考える．S で囲まれた領域を V とする．

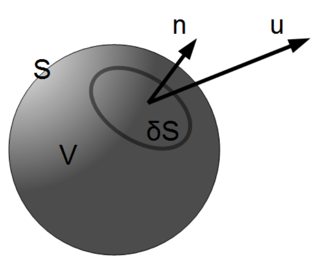

図 3.1　空間に固定された閉じた領域

任意の時刻において，V 内の流体の質量は

$$\iiint_V \rho dV$$

である．したがって，V 内の流体の単位時間当たりの質量の増加は

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho dV=\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}dV$$

で与えられる．一方，S を通って単位時間当たりに V から流出する流体の質量は，微小な面要素 δS を通って単位時間当たりに流出する質量 $\rho\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\delta S$ を S 全体で加え合わせれば

$$\iint_S \rho\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}dS$$

である．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S の外向き単位法線ベクトルである．流体が新たに発生あるいは消滅したりしない限り，V 内の流体の質量増加は境界面 S を通って流体質量が流入したことによるので，次式が成り立つ．

$$\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV = -\iint_S \rho\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}dS$$

ここで，ガウスの定理を用いて右辺の面積積分を体積積分に変換して，移行すれば

$$\iiint_V (\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\rho\boldsymbol{u})dV = 0$$

を得る．上式が任意の領域 V に対して常に成り立つためには

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}) = 0 \quad \text{または} \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0 \tag{3.4}$$

が成り立つ必要がある．この式が質量保存則のひとつの表現であり，**連続の式**（equation of continuity）と呼ばれる．また，ベクトル公式

$$\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\rho + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{u}$$

を用いれば，連続の式（3.4）は次のように書き換えることもできる．

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{または} \quad \frac{D\rho}{Dt} + \frac{\partial\boldsymbol{u_i}}{\partial x_i} = 0 \tag{3.5}$$

流体粒子の密度が運動中変わらないとき，すなわち $D\rho/Dt = 0$ であるとき，流れは**非圧縮**（incompressible）であるという．このとき連続の式は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{または} \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{3.6}$$

に帰着する．

3.3 運動方程式

3.4 状態方程式

3.5 熱力学的エネルギーの式

付録 A　応力に関する補足

A.1　連続体のつり合い

まず，力の合計が 0 になる条件を導く．続体のある領域 V（その表面を S とする）において，領域表面にはたらく応力 $T_i(\boldsymbol{n})$ と，領域にはたらく体積力 $\boldsymbol{K}$ の合計がつり合うとき，

$$\int_S \tau_{ij} n_j dS + \int_V K_i dV = 0 \tag{付録 A.1}$$

を満たす．ここで，発散の定理を用いれば（付録 A.1）は，

$$\int_V (\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + K_i) dV = 0 \tag{付録 A.2}$$

となる．いま領域 V は任意なので，（付録 A.2）が恒等的に成り立つためには体積積分の中身が 0 でなければならない．よって，連続体についてのつり合いの式

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + K_i = 0 \tag{付録 A.3}$$

を得る．

A.2　応力テンソルの対称性

次に，トルクの合計が 0 になる条件を導く．連続体のある領域 V（その表面を S とする）において，領域表面にはたらく応力 $T_i(\boldsymbol{n})$ のトルクと，領域にはたらく体積力 $\boldsymbol{K}$ のトルクがつり合うとき，

$$\int_S (\boldsymbol{r} \times (\tau_{ij} n_j)) dS + \int_V \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{K} dV = 0 \tag{付録 A.4}$$

を満たす．なお，直交座標系を使うとして添え字の上下には配慮しないものとする．また，外積はテンソルで表記すれば，

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

となる．ここで，ε_{ijk} はレヴィ・チヴィタ（Levi-Civita）の記号であり，

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & ((i,j,k) \in \{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\}); \\ -1 & ((i,j,k) \in \{(1,3,2),(3,2,1),(2,1,3)\}); \\ 0 & (otherwise) \end{cases}$$

と定義される．これを用いれば，（付録 A.4）は，

$$\int_S (\varepsilon_{ijk} x_j \tau_{kl} n_l)) dS + \int_V (\varepsilon_{ijk} x_j K_k) dV = 0 \tag{付録 A.5}$$

となる．

（付録 A.5）の第 1 項は発散の定理により，

$$\begin{aligned}\int_S (\varepsilon_{ijk} x_j \tau_{kl} n_l))dS &= \int_V \frac{\partial}{\partial x_l}(\varepsilon_{ijk} x_j \tau_{kl})dV \\ &= \int_V \varepsilon_{ijk}(\tau_{kl}\frac{\partial x_j}{\partial x_l} + x_j \frac{\partial \tau_{kl}}{\partial x_l})dV \\ &= \int_V \varepsilon_{ijk}(\tau_{kl}\delta_{jl} + x_j \frac{\partial \tau_{kl}}{\partial x_l})dV\end{aligned}$$

となる．ここで δ_{jl} はクロネッカーのデルタ（Kronecker delta）であり，$j = l$ のとき 0 で $j \neq l$ のとき 1 である．

よって（付録 A.5）は,

$$\int_V \varepsilon_{ijk}(\tau_{kl}\delta_{jl} + x_j(\frac{\partial \tau_{kl}}{\partial x_l} + K_k))dV = 0$$

となる．また，つり合いの式（付録 A.3）より積分内の第 2 項は 0 であるので，結局

$$\int_V (\varepsilon_{ijk}\tau_{kl}\delta_{jl})dV = 0$$

となる．ここで領域 V は任意に選ぶことができるので，上式が恒等的に成り立つためには,

$$\varepsilon_{ijk}\tau_{kl}\delta jl = 0$$

を満たさなければならない．したがって，モーメントの合計が 0 であるという物理的な制約は,
応力テンソルが対称テンソルであること，すなわち

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}$$

を要請する．

参考文献

[1] 九州大学大学院総合理工学府　大気海洋環境システム学専攻編，2006：　地球環境を学ぶための流体力学．成山堂書店，323pp.

[2] 木村竜治，1983：地球流体力学入門，東京堂出版，247pp.