ITPASS数値計算実習課題その１

平成21 年8 月4 日

1　中心星と惑星に対して成り立つ運動方程式

運動方程式は、

$$M\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = F \tag{1}$$

と表される。中心星と惑星が共通の重心を中心として運動していると考える。このとき、重心の位置ベクトル $\mathbf{r}$ は、

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_2} - \mathbf{r_1} \tag{2}$$

重心の位置にかかる質量 M は、

$$M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{3}$$

ここで、F は万有引力のみを考えるので、

$$F = -\frac{G m_1 m_2}{r^2} \tag{4}$$

よって、(2)〜(4) より、(1) は、

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G m_1 m_2}{r^3}\mathbf{r} \tag{5}$$

と表され、

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3}\mathbf{r} \tag{6}$$

が導出された。

2　１の運動方程式を成分に分ける

(1) の運動方程式に $\mathbf{r} = (x, y)$ を代入して、

$$\frac{d^2}{dt^2}(x, y) = -\frac{G m_1 m_2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y) \tag{7}$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}) = -\frac{Gm_1m_2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(x,y) \tag{8}$$

題意より、$\mathbf{v} \equiv (v_x, v_y) = (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$ なので、

$$\frac{d}{dt}(v_x, v_y) = -\frac{Gm_1m_2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(x,y) \tag{9}$$

よって、求める成分は、

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{Gm_1m_2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}x \quad , \quad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{Gm_1m_2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}y \tag{10}$$