

ITPASS 数値計算実習課題 1

M Ishii

情報実験機 : jouho01

平成 21 年 8 月 19 日

1 中心星と惑星に成り立つ運動方程式

運動方程式

$$M \frac{d^2 r}{dt^2} = F \quad (1)$$

である。中心星の位置ベクトルは \mathbf{r}_1 、惑星の位置ベクトルは \mathbf{r}_2 とおく。今この系における支配的な力は万有引力のみであるので

$$\mathbf{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\mathbf{r} \quad (2)$$

(1) と (2) と位置ベクトル、さらに相対ベクトル $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ を用いると

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r} \quad (3)$$

$$m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r} \quad (4)$$

(3) の両辺を m_1 でわり (3)' とし、(4) の両辺を m_2 でわり (4)' とし、(3)' - (4)' すると

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{r^3}\mathbf{r} \quad (5)$$

よって、求めたい式が導出された。

2 成分分解

前問を成分 x, y に分解する。

(1) の運動方程式に $r = (x, y)$ を代入して

$$\frac{d^2}{dt^2}(x, y) = -\frac{G(m_1 + m_2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y) \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = -\frac{G(m_1 + m_2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} (x, y) \quad (7)$$

ここで題意より、

$$\vec{v} \equiv (v_x, v_y) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$$

なので、

$$\frac{d}{dt} (v_x, v_y) = -\frac{G(m_1 + m_2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} (x, y) \quad (8)$$

よって、求めたい成分は

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} x, \quad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} y$$

となる。